MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON W. SÜSS

64. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 25. FEBRUAR 1956)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1956

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W35 Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

64. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Eichler, M., Der Hilbertsche Klassenkörper eines imaginärquadratischen Zahlkörpers 229

Kasch, F., Abschätzung der Dichte von Summenmengen (Zweite Mitteilung) . . . 243

Wilansky, A., und K. Zeller, Abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen; starke Limitierbarkeit 258

Kunle, H., Über T-Figuren in einem quadratischen Komplex 270

McMinn, T. J., On figures of equillibrium of rotating liquids 286

Jacobs, K., Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen . . . 298

Gundlach, K.-B., Poincarésche und Eisensteinsche Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe 339

Baumann, V., Eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung der Wärmeübertragung bei Wärmeleitung und -strahlung 353

EICHLER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 229—242 (1956)

Der Hilbertsche Klassenkörper eines imaginärquadratischen Zahlkörpers

Von
MARTIN EICHLER

Einleitung

Es bedeute $j(\tau)=\sum_{n=-1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n\tau}$ $(c_{-1}=1)$ die absolute Invariante und k_0 den Körper der rationalen Zahlen. Den sog. *Modularkorrespondenzen* T_n sind die Polynome

$$F_n(x, x')=\prod\left(x-j\left(\frac{r_1\tau+r_2}{r_3}\right)\right)$$

in x und $x'=j(\tau')$ mit ganzen Koeffizienten in k_0 zugeordnet; in diesen Produkten durchlaufen r_1, r_2, r_3 alle Zahlen der Eigenschaften

$$r_1>0,\ r_3>0,\ r_1 r_3=n,\ 0\leq r_2<r_3.$$

Die *Fixpunkte* oder *Koinzidenzen* der Korrespondenz T_n sind die Nullstellen von $F_n(x, x)=0$. Man beweist in der Theorie der komplexen Multiplikation den folgenden Satz:

Die Nullstellen des größten gemeinsamen Teilers der Polynome $F_n(x, x)$ für alle diejenigen n, welche Normen aus einem imaginärquadratischen Zahlkörper $k=k_0(\sqrt{d})$ $(d<0)$ sind, erzeugen über k den Hilbertschen Klassenkörper. Dabei versteht man unter dem Hilbertschen Klassenkörper einen unverzweigten galoisschen Relativkörper, dessen Galoisgruppe mit der absoluten Idealklassengruppe von k isomorph ist, und in welchem ein Primideal $\mathfrak{p}$ von k in lauter Primideale f-ten Grades zerlegt wird, wenn f der genaue Exponent ist, für den $\mathfrak{p}^f\sim 1$ gilt.

Die klassischen Beweise benutzen neben der Funktion $j(\tau)$ noch die Diskriminante $\Delta(\tau)$ des elliptischen Gebildes mit dem Periodenverhältnis τ[1]). Ein moderner Beweis von DEURING[2]) stützt sich in stärkerem Maße auf die elliptischen Funktionen, ja er läßt sich sogar so anordnen, daß man allein mit der abstrakten Theorie der elliptischen Funktionenkörper auskommt, ohne Benutzung transzendenter Funktionentheorie.

Die folgenden Seiten sind einem neuen Beweis gewidmet, der sich zwar im wesentlichen aus den Schlüssen der klassischen Theorie aufbaut, der aber im Unterschied hierzu ganz ohne elliptische Funktionen und die Funktion

[1]) HASSE, H.: J. reine angew. Math. **157**, 115—139 (1927) und **165**, 64—88 (1931). Vgl. ferner die dort angegebene Literatur.

[2]) DEURING, M.: Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg **16**, 32—47 (1947) und Math. Ann. **124**, 393—426 (1952).

$\Delta(\tau)$ auskommt, offenbar eine sachliche Vereinfachung. Allerdings liefert er nicht das Artinsche Reziprozitätsgesetz für den Klassenkörper, im Gegensatz zu den früheren Beweisen; vgl. hierzu auch die Schlußbemerkung. Was über $j(\tau)$ vorausgesetzt wird, ist lediglich zweierlei: diese Funktion ist erstens eine in der oberen Halbebene reguläre bei der Modulgruppe invariante Funktion, die jeden Wert im Fundamentalbereich genau einmal annimmt, sie gestattet zweitens eine Entwicklung in eine Fourier-Reihe der oben angegebenen Art, wobei die Koeffizienten c_n rationale Zahlen sind, in deren Nennern höchstens endlich viele Primzahlen auftreten. Aus dieser zweiten Voraussetzung leitet man in üblicher Weise her, daß die oben gebildeten Funktionen $F_n(x, x')$ Polynome mit rationalen Koeffizienten sind, welche für fast alle Primzahlen p den Kongruenzen

$$F_p(x, x') \equiv (x - x'^p)\,(x^p - x') \bmod p, \tag{1}$$

$$F_{p^2}(x, x') \equiv (x - x'^{p^2})\,(x^{p^2} - x')\,(x - x')^p \bmod p \tag{1a}$$

genügen.

§ 1. Die Grundlagen in der Matrixalgebra

Ich beginne damit, an einige wohlbekannte Dinge zu erinnern, wenngleich in einer Sprache, die in diesem Zusammenhang vielleicht ungewohnt wirkt. Es bezeichne $\mathfrak{O}$ den Ring der ganzzahligen zweireihigen Matrizen, das ist eine maximale Ordnung in der Matrixalgebra zweiten Grades. $\mathfrak{o}$ sei die maximale Ordnung eines imaginärquadratischen Zahlkörpers $k = k_0(\sqrt{d})$, $d < 0$. In $\mathfrak{O}$ gibt es unendlich viele mit $\mathfrak{o}$ isomorphe Teilringe $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \ldots$. Ist ε eine Einheit von $\mathfrak{O}$, so ist mit $\mathfrak{o}_1$ auch $\varepsilon \mathfrak{o}_1 \varepsilon^{-1}$ in $\mathfrak{O}$ enthalten und mit $\mathfrak{o}$ isomorph. Zwei in dieser Weise zusammenhängende Ordnungen sollen *äquivalent* heißen; die Gesamtheiten äquivalenter Ordnungen nennt man Klassen. Die verschiedenen Klassen äquivalenter Ordnungen entsprechen nun den (absoluten) Idealklassen von k wie folgt.

Es seien $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2$ zwei mit $\mathfrak{o}$ isomorphe Teilringe von $\mathfrak{O}$. Dann gilt mit einem Nichtnullteiler α: $\mathfrak{o}_2 = \alpha \mathfrak{o}_1 \alpha^{-1}$. Folglich ist $\mathfrak{o}_1 \in \mathfrak{O}' = \alpha^{-1}\mathfrak{O}\alpha$. Nach einem Satze von CHEVALLEY-HASSE-NOETHER[3]) gibt es demzufolge ein $\mathfrak{o}_1$-Ideal $\mathfrak{a}_1$, so daß $\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1$ die Rechtsordnung $\mathfrak{O}'$ hat. Andererseits hat aber auch das Ideal $\mathfrak{O}\alpha$ diese Rechtsordnung $\mathfrak{O}'$. Folglich ist bis auf einen ambigen Rechtsfaktor

$$\mathfrak{O}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{O}\alpha. \tag{2}$$

Nun haben aber alle diese ambigen Ideale die Gestalt $\mathfrak{O}'a$, $a \in k_0$; man kann den Faktor a nach Belieben in α oder $\mathfrak{a}_1$ aufnehmen, so daß (2) schlechthin gilt. Hiermit ist dem Paar $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2$ ein $\mathfrak{o}_1$-Ideal $\mathfrak{a}_1$ zugeordnet worden. Multipliziert man $\mathfrak{a}_1$ und α rechts mit einem $\alpha_1 \in \mathfrak{o}_1$, so bleibt (2) bestehen, $\mathfrak{o}_2$ ändert sich nicht und $\mathfrak{a}_1$ wird durch ein äquivalentes Ideal ersetzt. Umgekehrt liefert jedes $\mathfrak{o}_1$-Ideal $\mathfrak{a}_1$ vermöge (2) ein Element α, denn in der Matrixalgebra

[3]) CHEVALLEY, C.: Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg **10** (1934). — HASSE, H.: Act. Sci. Ind. (Paris) **109** (1934). — NOETHER, E.: Act. Sci. Ind. **148** (1934).

sind alle Ideale Hauptideale. Mit diesem Element α wird dann $\mathfrak{o}_2 = \alpha \mathfrak{o}_1 \alpha^{-1}$ gebildet. Durch (2) ist α aber nur bis auf eine Einheit als linksseitigen Faktor bestimmt, deshalb gehört zu einer $\mathfrak{o}_1$-Idealklasse eine Klasse von mit $\mathfrak{o}$ isomorphen Teilringen in $\mathfrak{O}$.

Dieser Zusammenhang zwischen den verschiedenen Ordnungen $\mathfrak{o}_i$ bedarf noch einer Verfeinerung. Zu einer Ordnung $\mathfrak{o}_1$ gibt es in der Matrixalgebra ein Element $\varkappa_1$, welches in $\mathfrak{o}_1$ den nicht identischen Automorphismus induziert; d.h. ist $\delta_1 \in \mathfrak{o}_1$, $\delta_1^2 = d$, so ist $\varkappa_1^{-1} \delta_1 \varkappa_1 = -\delta_1$. Die Matrixalgebra ist dann das verschränkte Produkt $\left(k_0(\sqrt{d}), \varkappa_1^2\right)$, und da sie eine indefinite Algebra und $d < 0$ ist, muß $-\varkappa_1^2 = n(\varkappa_1) < 0$ sein. Verabredet man nun, daß in den Gln. (2) stets $n(\alpha) > 0$ genommen wird, *so werden durch die entsprechenden Abbildungen* $\mathfrak{o}_1 \to \alpha \mathfrak{o}_1 \alpha^{-1}$ *die Ordnungen* $\mathfrak{o}_i$ *in eindeutiger Weise aufeinander isomorph bezogen.* Das heißt: es ist nicht möglich durch eine (eventuell zusammengesetzte) Transformation dieser Art $\mathfrak{o}_1 \to \alpha \mathfrak{o}_1 \alpha^{-1}$ in $\mathfrak{o}_1$ den nicht identischen Automorphismus zu erzeugen. Hieraus folgt weiter: Die Einteilung der $\mathfrak{o}_i$ in Klassen läßt sich so verfeinern, daß die verschiedenen $\mathfrak{o}_i$ einer Klasse bereits durch Transformationen mit Einheiten positiver Norm auseinander hervorgehen. Ist ε eine Einheit der Norm -1 und $\mathfrak{o}_2 = \varepsilon \mathfrak{o}_1 \varepsilon^{-1}$, so ist auch mit dem oben erwähnten Element $\varkappa_1$: $\mathfrak{o}_2 = \varepsilon \varkappa_1 \mathfrak{o}_1 (\varepsilon \varkappa_1)^{-1}$ und $n(\varepsilon \varkappa_1) > 0$; $\mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{o}_2$ gehören möglicherweise verschiedenen Klassen an. Die Einheiten der Norm $+1$ von $\mathfrak{O}$ bilden die Modulgruppe.

Der geschilderte Zusammenhang zwischen den Idealklassen von k und den Klassen von Ordnungen $\mathfrak{o}_i$ liefert gleichzeitig eine Gruppe von Permutationen der Klassen der $\mathfrak{o}_i$, welche mit der Idealklassengruppe in k isomorph ist. Es sei C eine Idealklasse von k und $\mathfrak{a}$ ein in C gelegenes Ideal. Das der (wie gezeigt eindeutig fixierten) Isomorphie $\mathfrak{o}_i \cong \mathfrak{o}$ entsprechende $\mathfrak{o}_i$-Ideal sei $\mathfrak{a}_i$. Man nehme ein α_i positiver Norm, für welches $\mathfrak{O}\mathfrak{a}_i = \mathfrak{O}\alpha_i$ gilt und ordne der Klasse C die Permutation

$$\sigma_C: \quad \mathfrak{o}_i \to \mathfrak{o}_i^{\sigma_C} = \alpha_i \mathfrak{o}_i \alpha_i^{-1}$$

zu. Daß es sich in der Tat um eine Permutation der Klassen handelt, ist klar. Es wird nun behauptet:

(3) $$\sigma'_{C_1} \sigma'_{C_2} = \sigma'_{C_1 C_2}.$$

Beweis. Aus

$$\mathfrak{a} \in C_1, \quad \mathfrak{O}\mathfrak{a}_i = \mathfrak{O}\alpha_i, \quad \mathfrak{o}_i^{\sigma_{C_1}} = \alpha_i \mathfrak{o}_i \alpha_i^{-1} = \mathfrak{o}_k,$$

$$\mathfrak{b} \in C_2, \quad \mathfrak{O}\mathfrak{b}_k = \mathfrak{O}\beta_k, \quad \left(\mathfrak{o}_i^{\sigma_{C_1}}\right)^{\sigma_{C_2}} = \beta_k \mathfrak{o}_k \beta_k^{-1},$$

$$\mathfrak{b}_k = \alpha_i \mathfrak{b}_i \alpha_i^{-1}$$

schließt man

$$\mathfrak{O}\mathfrak{b}_k = \mathfrak{O}\alpha_i \mathfrak{b}_i \alpha_i^{-1} = \mathfrak{O}\beta_k,$$

$$\mathfrak{O}\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i = \mathfrak{O}\alpha_i \mathfrak{b}_i = \mathfrak{O}\beta_k \alpha_i.$$

Es ist $n(\beta_k \alpha_i) > 0$, also

$$\left(\mathfrak{o}_i^{\sigma'_{C_1}}\right)^{\sigma'_{C_2}} = (\beta_k \alpha_i)\, \mathfrak{o}_i (\beta_k \alpha_i)^{-1} = \mathfrak{o}_i^{\sigma'_{C_1} \sigma_{C_2}}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

§ 2. Modularkorrespondenzen und Klasseninvarianten

Den Ordnungen $\mathfrak{o}_i$ werden zunächst die Wurzeln τ_i mit positivem Imaginärteil der Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{a\tau+b}{c\tau+d}=\tau, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_i, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Wie man leicht nachrechnet, gehört zu sämtlichen Matrizen einer Ordnung $\mathfrak{o}_i$, welche nicht Vielfache der Einheitsmatrix sind, ein und nur ein τ_i. Zu zwei äquivalenten Ordnungen $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2=\varepsilon\mathfrak{o}_1\varepsilon^{-1}$ mit einem ε aus der Modulgruppe gehören zwei Werte τ_1, τ_2, die durch die ε entsprechende gebrochen lineare Substitution auseinander hervorgehen. Die komplexen Zahlen

$$\xi_i = j(\tau_i)$$

sind dann Invarianten der Klassen äquivalenter $\mathfrak{o}_i$, sie heißen die *Klasseninvarianten.*

Es sei nun ν ein Element aus der Ordnung $\mathfrak{o}$, die Norm von ν sei $n(\nu)=n$. Das ν entsprechende Element in der Ordnung $\mathfrak{o}_i$ sei ν_i, und $\nu_i, \nu_i', \nu_i'', \ldots$ sei ein System von Elementen aus $\mathfrak{O}$ von der Art, daß $\mathfrak{O}\nu_i, \mathfrak{O}\nu_i', \mathfrak{O}\nu_i'', \ldots$ alle ganzen $\mathfrak{O}$-Linksideale der Norm n genau einmal repräsentieren. Dann ist

$$F_n(x,x') = \big(x-j(\nu_i(\tau'))\big)\big(x-j(\nu_i'(\tau'))\big)\big(x-j(\nu_i''(\tau'))\big)\ldots$$

das die Modularkorrespondenz T_n darstellende Polynom; dabei bedeute $\nu_i(\tau')$ usw. die der Matrix ν_i usw. entsprechende gebrochen lineare Substitution. Da nun τ_i Wurzel der Gleichung $\nu_i(\tau_i)=\tau_i$ ist, genügt ξ_i der Gleichung $F_n(x,x)=0$. Die Klasseninvarianten sind also Koinzidenzpunkte der Modularkorrespondenzen T_n, wo n alle Normen von Elementen aus k durchläuft. Hieraus entnimmt man die beiden ersten der drei folgenden Behauptungen:

E 1. *Die ξ_i sind algebraische Zahlen.*

E 2. *Die ξ_i sind alle untereinander verschieden,* denn die zu verschiedenen Klassen von Ordnungen gehörigen τ_i sind nicht nach der Modulgruppe äquivalent, und $j(\tau)$ nimmt jeden Wert im Fundamentalbereich genau einmal an.

E 3. *Der größte gemeinsame Teiler der $F_n(x,x)$ für alle n, welche Normen von Elementen aus $\mathfrak{o}$ sind (die nicht schon in k_0 liegen), ist*

$$\prod_{i=1}^{h}(x-\xi_i) = g(x),$$

dieses Polynom hat hiernach rationale Koeffizienten.

Zum Beweise sei ξ_0 eine gemeinsame Nullstelle aller dieser $F_n(x,x)$. Es gibt also ein τ_0 mit positivem Imaginärteil, sowie für jedes dieser n eine ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Determinante n und hierzu ein Element $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ der Modulgruppe, so daß

$$\xi_0 = j(\tau_0), \quad \frac{a\tau_0+b}{c\tau_0+d} = \frac{\alpha\tau_0+\beta}{\gamma\tau_0+\delta}$$

ist. O.B.d.A. darf man $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ voraussetzen. Dann ist τ_0 Wurzel einer quadratischen Gleichung der Gestalt (4). Alle Matrizen $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, welche in dieser Weise zu τ_0 gehören, bilden eine Ordnung $\mathfrak{o}_0$, die mit einer Ordnung aus einem imaginärquadratischen Zahlkörper isomorph sein muß. Sie hat, wie gezeigt, die Eigenschaft, daß sie Elemente derselben Norm besitzt wie $\mathfrak{o}$. Daraus kann man leicht $\mathfrak{o}_0 \cong \mathfrak{o}$ schließen.

Hierzu betrachte man die kleinste vorkommende Norm >1. Diese ist $\frac{d}{4}$ oder $\frac{1-d}{4}$, wo d die Diskriminante von $\mathfrak{o}$ bezeichnet, und zwar je nachdem $d \equiv 0$ oder $\equiv 1 \bmod 4$ ist. Ist d_0 die Diskriminante von $\mathfrak{o}_0$, so muß also einer der vier folgenden Fälle vorliegen:

a) $d \equiv d_0 \equiv 0 \bmod 4$: $\quad -\frac{d}{4} = -\frac{d_0}{4}$.

b) $d \equiv d_0 \equiv 1 \bmod 4$: $\quad \frac{1-d}{4} = \frac{1-d_0}{4}$.

c) $d \equiv 0 \bmod 4$, $d_0 \equiv 1 \bmod 4$: $\quad -\frac{d}{4} = \frac{1-d_0}{4}$.

d) $d \equiv 1 \bmod 4$, $d_0 \equiv 0 \bmod 4$: $\quad \frac{1-d}{4} = -\frac{d_0}{4}$.

In den beiden ersten Fällen sind die Diskriminanten gleich, also die Ordnungen isomorph. In den beiden letzten vergleicht man auch noch die zweitkleinsten Normen $1-\frac{4}{d}$ bzw. $\frac{9-d}{4}$. Das führt neben c), d) auf $1-\frac{d}{4} = \frac{9-d_0}{4}$ bzw. $\frac{9-d}{4} = 1-\frac{d_0}{4}$, was mit c) bzw. d) nicht verträglich ist.

Es kommt darauf an, die Wirkung der in § 1 definierten Permutationen σ'_C auf die Klasseninvarianten zu studieren. Das Folgende enthält eine Vorbereitung. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades von k. Für eine mit $\mathfrak{o}$ isomorphe Teilordnung $\mathfrak{o}_i$ von $\mathfrak{O}$ bilde man das entsprechende Primideal $\mathfrak{p}_i$ sowie das dazu konjugierte $\bar{\mathfrak{p}}_i$, und es sei

$$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{O}\mathfrak{p}_i = \mathfrak{O}\pi_i, \qquad \mathfrak{P}'_i = \mathfrak{O}\bar{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{O}\pi'_i, \qquad n(\pi_i) = n(\pi'_i) = p. \tag{5}$$

Diese beiden $\mathfrak{O}$-Linksideale sind verschieden, wenn $\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}}$ ist. In der Bezeichnungsweise von § 1 ist nun

$$\mathfrak{o}_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}} = \pi_i \mathfrak{o}_i \pi_i^{-1}, \qquad \mathfrak{o}_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}} = \pi'_i \mathfrak{o}_i \pi_i'^{-1},$$

wo $\sigma'_{\mathfrak{p}}, \sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}$ die den Klassen von $\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}$ zugeordneten Permutationen sind. Für die diesen Ordnungen zugeordneten Wurzeln τ_i, $\tau_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}}$, $\tau_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}}$ der Gln. (4) gilt dann

$$\tau_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}} = \pi_i(\tau_i), \qquad \tau_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}} = \pi'_i(\tau_i). \tag{6}$$

Andererseits ergänze man die Ideale (5) zu einem vollständigen System $\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}'_i, \mathfrak{P}''_i = \mathfrak{O}\pi''_i$ mit $n(\pi''_i) > 0$ usw. von $\mathfrak{O}$-Linksidealen der Primzahlnorm p. Dann ist

$$F_p(x, x') = \big(x - j(\pi_i(\tau'))\big)\big(x - j(\pi'_i(\tau'))\big)\big(x - j(\pi''_i(\tau'))\big)\ldots.$$

Setzt man hier $\tau' = \tau_i$ ein, so treten rechts wegen (6) die beiden Faktoren $(x - \xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}})$, $(x - \xi_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}})$ auf, wenn

$$\xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}} = j\left(\tau_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}}\right) = j\left(\pi_i(\tau_i)\right)$$

definiert wird. Die übrigen $j(\pi_i''(\tau_i))$, usw. sind keine Klasseninvarianten mehr. Die $\pi_i''(\tau_i)$ sind nämlich die Wurzeln der Gln. (4) für die Ordnungen $\pi_i'' \mathfrak{o}_i \pi_i''^{-1}$ usw. Diese liegen aber nicht mehr in $\mathfrak{O}$. Denn wäre $\pi_i'' \mathfrak{o}_i \pi_i''^{-1} \subset \mathfrak{O}$, so wäre $\mathfrak{o}_i \subset \pi_i''^{-1} \mathfrak{O} \pi_i''$, demnach wäre $\mathfrak{o}_i$ in der Rechtsordnung des Ideals $\mathfrak{P}_i'' = \mathfrak{O}\pi_i''$ enthalten. Dann wäre dieses Ideal aber nach dem oben angeführten Satze von Chevalley-Hasse-Noether von der Form $\mathfrak{O}\mathfrak{q}_i$ mit einem ganzen $\mathfrak{o}_i$-Ideal $\mathfrak{q}_i$. Dieses müßte die Norm p haben. Es gibt aber nur zwei solche Ideale $\mathfrak{p}_i, \bar{\mathfrak{p}}_i$, und diese lieferten bereits $\mathfrak{O}\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{O}\bar{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{P}_i'$. Wir fassen das Ergebnis zusammen:

E 4. *Es sei $\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal ersten Grades der Norm p in k. Dann hat $F_p(x, \xi_i)$ mit $g(x)$ den größten gemeinsamen Teiler $(x - \xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}})(x - \xi_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}}})$ oder $(x - \xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}}})$, je nachdem ob $\mathfrak{p} \not\sim \bar{\mathfrak{p}}$ oder $\mathfrak{p} \sim \bar{\mathfrak{p}}$ ist.*

Der völlig analoge Beweis für die folgende Tatsache darf übergangen werden:

E 5. *Unter denselben Voraussetzungen haben $F_{p^2}(x, \xi_i)$ und $g(x)$ den größten gemeinsamen Teiler $(x - \xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}^2}})(x - \xi_i^{\sigma'_{\bar{\mathfrak{p}}^2}})(x - \xi_i)$ oder $(x - \xi_i^{\sigma'_{\mathfrak{p}^2}})(x - \xi_i)$ oder $(x - \xi_i)$, je nachdem ob $\mathfrak{p}^2, \bar{\mathfrak{p}}^2$, (1) drei, zwei oder eine Idealklasse repräsentieren.* (Zum leichteren Verständnis: $\xi_i = \xi_i^{\sigma_1'}$, $\sigma_1' = \sigma'_{\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}}$.)

Die durch Kursivdruck hervorgehobenen Eigenschaften E 1 bis E 5 sind wohlbekannt. Sie reichen hin, zusammen mit den Kongruenzen (1), den Körper der ξ_i als den Klassenkörper zu erweisen.

§ 3. Automorphismen des Körpers der Klasseninvarianten

In § 3 bedeute durchweg $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades von k und p seine Norm. Endlich viele $\mathfrak{p}$ und p werden ein für alle Male ausgeschlossen, nämlich die Teiler des Hauptnenners der Koeffizienten von $g(x)$, die Teiler von $g(0)$, und die Teiler der Diskriminante von $g(x)$. Für die übrigen p sind die Klasseninvarianten sowie deren Differenzen p-adische Einheiten.

Hilfssatz 1. *Den Permutationen σ'_C lassen sich Automorphismen σ_C des Körpers $K = k_0(\xi_1, \ldots, \xi_h)$ der Klasseninvarianten zuordnen, wobei gilt: ist $\xi_i^{\sigma'_\sigma} = \xi_j$, so ist $\xi_i^{\sigma_\sigma} = \xi_j$ mit einem möglicherweise von i abhängigen Exponenten $e = \pm 1$.*

σ_C und σ'_C haben gleiche Ordnung, und die Zyklen $\xi_i, \xi_i^{\sigma_\sigma}, \xi_i^{\sigma_\sigma^2}, \ldots$ und $\xi_i, \xi_i^{\sigma'_\sigma}, \xi_i^{\sigma'^2_\sigma}, \ldots$ stimmen überein, möglicherweise in umgekehrter Reihenfolge.

σ_C braucht durch σ'_C nicht eindeutig definiert zu sein, insbesondere könnte man σ_C durch σ_C^{-1} ersetzen. Zeichnet man eine Klasseninvariante ξ_1 aus und verlangt man $\xi_1^{\sigma_\sigma} = \xi_1^{\sigma'_\sigma}$, so ist die umgekehrte Abbildung $\sigma_C \to \sigma'_C$ eindeutig,

denn die σ_C' bilden eine transitive Permutationsgruppe der Ordnung h von h Objekten.

Beweis. Es sei zunächst $C^2=1$, d.h. die Hauptklasse. Das Primideal $\mathfrak{p}$ sei in C gelegen. Dann gilt nach E 4 und (1)

$$F_p(\xi_i^{\sigma_C'}, \xi_i) \equiv (\xi_i^{\sigma_C'} - \xi_i^p)\,(\xi_i^{p\,\sigma_C'} - \xi_i) \bmod \mathfrak{p} \tag{7}$$

für jedes ξ_i; dabei ist $\xi_i^{p\,\sigma_C'}$ eine Abkürzung für $(\xi_i^{\sigma_C'})^p$. Ferner ergibt E 4, daß sich $\xi_i^{\sigma_C'}$ als Polynom in ξ_i mit rationalen Koeffizienten berechnen läßt: $\xi_i^{\sigma_C'} = R(\xi_i)$. Wegen $C^2=1$ und (3) ist dann auch $\xi_i = R(\xi_i^{\sigma_C'})$. Im folgenden werden nun auch noch die in den Nennern der Koeffizienten von $R(x)$ aufgehenden Primzahlen ausgeschlossen.

Da voraussetzungsgemäß die Differenzen verschiedener ξ_i $\mathfrak{p}$-adische Einheiten sind, schließt man aus (7): in dem Unterkörper $k_0(\xi_1)$ von K gibt es einen Primteiler $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{p}$, so daß

$$\xi_1^{\sigma_C'} = R(\xi_1) \equiv \xi_1^{p^e} \bmod \mathfrak{P}_1 \qquad \text{mit} \qquad e = \pm 1$$

gilt. Daraus folgt weiter

$$\xi_1 = R(\xi_1^{\sigma_C'}) \equiv R(\xi_1^{p^e}) \equiv R(\xi_1)^{p^e} = (\xi_1^{\sigma_C'})^{p^e} \bmod \mathfrak{P}_1$$

oder auch

$$\xi_1^{\sigma_C'} \equiv \xi^{p^{-e}} \bmod \mathfrak{P}_1.$$

Demnach kann man

$$\xi_1^{\sigma_C'} \equiv \xi_1^p \bmod \mathfrak{P}_1 \tag{8}$$

annehmen. Die Kongruenz (8) besagt, daß die Abbildung $\xi_1 \to \xi_1^{\sigma_C'}$ ein Automorphismus des Restklassenkörpers von $k_0(\xi_1) \bmod \mathfrak{P}_1$ ist. Nun gilt aber (8) für die Normen p aller Primideale $\mathfrak{p}$ ersten Grades aus der Klasse C, von höchstens endlich vielen Ausnahmen abgesehen, bzw. für gewisse Primteiler $\mathfrak{P}_1$ dieser p. Man schließt hieraus, daß σ_C' ein globaler Automorphismus von $k_0(\xi_1)$ ist. Nämlich aus einer Gleichung $f(\xi_1)=0$ mit ganzen rationalen Koeffizienten folgt $f(\xi_1^{\sigma_C'}) \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}_1$ für unendlich viele $\mathfrak{P}_1$, also $f(\xi_1^{\sigma_C'})=0$.

Man bezeichnet $\xi_1^{\sigma_C'}$ mit ξ_2 und adjungiert eine dritte Klasseninvariante ξ_3. Wie oben ergibt sich die Kongruenz

$$\xi_1^{\sigma_C'} \equiv \xi_3^p \bmod \mathfrak{P}_3$$

für einen Primteiler $\mathfrak{P}_3$ von $\mathfrak{P}_1$ in dem Körper $k_0(\xi_1, \xi_3)$. Also ist σ_C ein Automorphismus des Restklassenkörpers von $k_0(\xi_1, \xi_3) \bmod \mathfrak{P}_3$. Da dieses für unendlich viele Primideale $\mathfrak{P}_3$ der Fall ist, ist $\sigma_C' = \sigma_C$ ein Automorphismus dieses Körpers. Fortsetzung der Schlußweise liefert nun die Behauptung.

Jetzt sei die Ordnung f der Klasse C größer als 2. Im Prinzip führt wieder dieselbe Schlußweise zum Ziel; jedoch kann man jetzt nicht zeigen, daß σ_C' ein Automorphismus ist. Zunächst sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades der Norm p in der Klasse C. Dann folgt aus E 4 und (1) die Kongruenz (7).

Ferner folgt aus E 4 die Existenz eines Polynoms $R(x, y)$ mit rationalen Koeffizienten, so daß

$$\xi_i^{\sigma_C'\sigma^2} = R(\xi_i, \xi_i^{\sigma_C'\sigma})$$

ist. Die in den Nennern der Koeffizienten von R aufgehenden p werden fortan ausgeschlossen.

Nach E 5 ist endlich $\xi_i^{\sigma_C'\sigma^2}$ eine Wurzel von $F_{p^2}(x, \xi_i)$. Da nun voraussetzungsgemäß die Differenzen verschiedener ξ_i p-adische Einheiten sind, folgt aus (1a)

$$(\xi_i^{\sigma_C'\sigma^2} - \xi_i)\,(\xi_i^{p^2\sigma_C'\sigma^2} - \xi_i) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}. \tag{9}$$

Man betrachte diese Kongruenz (9) zusammen mit den beiden Spezialfällen von (7):

$$(\xi_i^{\sigma_C'\sigma^2} - \xi_i^{p\,\sigma_C'\sigma})\,(\xi_i^{p\,\sigma_C'\sigma^2} - \xi_i^{\sigma_C'\sigma}) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p},$$

$$(\xi_i^{\sigma_C'\sigma} - \xi_i^{p})\,(\xi_i^{p\,\sigma_C'\sigma} - \xi_i) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}.$$

Und zwar nehme man $i = 1$ und diskutiere diese drei Kongruenzen gleichzeitig in dem Körper $k_0(\xi_1, \xi_1^{\sigma_C'\sigma})$. Es gibt einen Primteiler $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{p}$ in diesem Körper, der entweder zweimal den ersten Faktor oder zweimal den zweiten dieser drei Produkte teilt. Eine ganz leichte Rechnung zeigt dann, daß $\mathfrak{P}_1$ jedesmal auch den ersten bzw. den zweiten Faktor in der dritten Kongruenz teilt, also

$$\xi_1^{\sigma_C'\sigma} \equiv \xi_1^{p^{e_1}}, \quad \xi_1^{\sigma_C'\sigma^2} \equiv \xi_1^{p^{e_1}\sigma_C'\sigma} \bmod \mathfrak{P}_1, \qquad e_1 = \pm 1. \tag{10}$$

Diese Kongruenz gilt für unendlich viele $\mathfrak{P}_1$. Der Exponent e_1 kann zwar noch von $\mathfrak{P}_1$ abhängen, er ist jedoch unendlich oft der gleiche. Daraus folgt wie oben, daß σ_C' ein Automorphismus von $k_0(\xi_1, \xi_1^{\sigma_C'\sigma})$ ist. Was die Wirkung auf diesen Körper betrifft, wird jetzt $\sigma_C = \sigma_C'^{e_1}$ definiert.

Man wählt die Numerierung $\xi_1^{\sigma_C'\sigma} = \xi_2, \ldots, \xi_{f-1}^{\sigma_C'\sigma} = \xi_f$ und adjungiert hierauf zwei weitere Klasseninvarianten ξ_{f+1} und $\xi_{f+1}^{\sigma_C'\sigma}$. Es gibt einen Primteiler $\mathfrak{P}_{f+1}$ von $\mathfrak{P}_1$ in dem Körper $k_0(\xi_1, \xi_2, \xi_{f+1}, \xi_{f+1}^{\sigma_C'\sigma})$, für welchen

$$\xi_{f+1}^{\sigma_C'\sigma} \equiv \xi_{f+1}^{p^{e_f+1}}, \quad \xi_{f+1}^{\sigma_C'\sigma^2} \equiv \xi_{f+1}^{p^{e_{f+1}}\sigma_C'\sigma} \bmod \mathfrak{P}_{f+1}, \qquad e_{f+1} = \pm 1 \tag{11}$$

gilt. Diese Kongruenz besteht für unendlich viele Primideale $\mathfrak{P}_{f+1}$, und für unendlich viele von diesen stimmen auch die Exponenten e_1, e_{f+1} überein. Was die Wirkung auf ξ_{f+1} betrifft, definiert man jetzt $\sigma_C = \sigma_C'^{e_{f+1}}$ und entnimmt den unendlich vielen Kongruenzen (11), daß σ_C ein Automorphismus von $k_0(\xi_1, \xi_2, \xi_{f+1}, \xi_{f+1}^{\sigma_C'\sigma})$ ist. Es ist nunmehr klar, wie man die Schlußweise fortsetzen muß, um die Behauptung zu erhalten.

Im gleichen Zuge ergibt sich

Hilfssatz 2. *Für eine Klasse $C \neq 1$ ist $\sigma_C^{\pm 1}$ der Frobenius-Automorphismus eines Primteilers $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in K, wenn $\mathfrak{p}$ die Norm eines Primideals $\mathfrak{p}$ ersten Grades von k ist. Das gilt für unendlich viele $\mathfrak{p}$. Diese Primzahlen zerfallen also in $[K:k_0]f^{-1}$ Primideale des Grades f, wo f die Ordnung der Klasse von $\mathfrak{p}$ ist.*

Es bleibt nur noch der Beweis für den Fall $f = 1$ nachzuholen. Jetzt ist jedes ξ_i nach E 3 Wurzel von $F_p(x, x)$, also gilt nach (1)

$$\xi_i^p \equiv \xi_i \bmod \mathfrak{P}$$

für die Teiler $\mathfrak{P}$ eines solchen p. Demnach ist jedes solche $\mathfrak{P}$ ein Primideal ersten Grades.

Eine letzte Konsequenz aus diesen Überlegungen ist

Hilfssatz 3. *Die konjugierten Elemente zu σ_C stimmen entweder mit σ_C oder mit σ_C^{-1} überein.*

Beweis. Es ist nämlich auf Grund der Definition von σ_C' und von (7)

$$\left(\xi_i^{\sigma\sigma} - \xi_i^p\right)\left(\xi_i^{p\,\sigma\sigma} - \xi_i\right) \equiv 0 \bmod p.$$

Also sämtliche Primteiler von p in K haben entweder σ_C oder σ_C^{-1} als Frobenius-Automorphismus. Andererseits treten aber als Frobenius-Automorphismen sämtliche zu σ_C konjugierten Elemente auf.

Selbstverständlich ist

Hilfssatz 4. *Die Abbildung der ξ_i auf die konjugiert komplexen Zahlen ist ein Automorphismus σ von K.*

§ 4. Beweis des Hauptsatzes

Dem Schluß in § 3, daß jede Idealklasse in k unendlich viele Primideale ersten Grades enthält, liegt die Benutzung analytischer Hilfsmittel zugrunde. Zur Erreichung des Zieles muß noch zwei weitere Male auf die Zetafunktionen zurückgegriffen werden. Formulieren wir zunächst den Hauptsatz in dieser Sprache!

Es sei K_1 das Kompositum von K und k und n_1 der Grad von K_1/k. Die Zetafunktion von K_1 ist

$$\zeta(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}} s}\right)^{-n_1 f_{\mathfrak{p}}^{-1} e_{\mathfrak{p}}^{-1}}, \tag{12}$$

das Produkt wird erstreckt über alle Primideale $\mathfrak{p}$ von k, dabei bedeuten $f_{\mathfrak{p}}$ und $e_{\mathfrak{p}}$ den Grad und die Verzweigungsordnung der in $\mathfrak{p}$ aufgehenden Primideale von K_1. Auf der anderen Seite werden die L-Reihen für die absoluten Idealklassen von k gebildet:

$$L_\chi(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \chi(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

und ihr Produkt

$$L(s) = \prod_{\chi} L_\chi(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}' s}\right)^{h f_{\mathfrak{p}}'^{-1}}, \tag{13}$$

wo $f_{\mathfrak{p}}'$ den Exponenten der Idealklasse von $\mathfrak{p}$ und h die Idealklassenanzahl von k bedeutet. Das in der Einleitung genannte Zerlegungsgesetz der Primideale von k in K_1 läßt sich so formulieren:

$$\zeta(s) = L(s). \tag{14}$$

Zunächst kann man, gestützt auf Hilfssatz 2, die Pole von $\zeta(s)$ und $L(s)$ bei $s=1$ vergleichen; beide sind von erster Ordnung. Sie werden bereits durch die Faktoren in (12) und (13) geliefert, welche zu solchen Primidealen $\mathfrak{p}_1$ bzw. $\mathfrak{p}_1'$ ersten Grades von k gehören, für die $f_{\mathfrak{p}_1}=1$ bzw. $f'_{\mathfrak{p}_1}=1$ ist. Aus Hilfssatz 2 geht nun aber gerade hervor, daß diese $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1'$ bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen übereinstimmen. Deshalb muß der Grad von K_1 über k gleich h sein.

Hiervon ausgehend kann man unter anderem zeigen, daß fast alle Primideale zweiten Grades von k (es sind alles Hauptideale) in K_1 völlig zerlegt werden (Hilfssatz 7). Das bedeutet, daß in (12) und (13) fast alle Faktoren übereinstimmen. Nunmehr führt ein eleganter Schluß HECKES folgendermaßen zu der Gl. (14): $\zeta(s)$ und $L(s)$ genügen den Funktionalgleichungen ($\mathfrak{d}$ ist die Relativdiskriminante von K_1/k)

$$N(\mathfrak{d})^{s/2}\left(\left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)\right)^h\zeta(s)=\Phi(s)=\Phi(1-s),$$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi}\right)^s\Gamma(s)\right)^h L(s)=\Psi(s)=\Psi(1-s).$$

Der Quotient ist voraussetzungsgemäß ein endliches Euler-Produkt

$$Q(s)=\frac{L(s)}{\zeta(s)}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{(1-N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}s})^{hf_{\mathfrak{p}}^{-1}e_{\mathfrak{p}}^{-1}}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-f'_{\mathfrak{p}}s})^{hf'^{-1}_{\mathfrak{p}}}} \tag{15}$$

und genügt der Funktionalgleichung

$$N(\mathfrak{d})^{-\frac{s}{2}}Q(s)=N(\mathfrak{d})^{\frac{s-1}{2}}Q(1-s).$$

Man bildet den Quotienten beider Seiten und läßt s auf der reellen Achse gegen ∞ streben:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\prod N(\mathfrak{p})^{\left(1-\frac{1}{e_{\mathfrak{p}}}\right)h(1-s)}}{N(\mathfrak{d})^{\frac{1}{2}-s}}=1.$$

Das ist nur dann möglich, wenn $\mathfrak{d}=(1)$ und alle $e_{\mathfrak{p}}=1$ sind. Die Funktionalgleichung für $Q(s)$ läßt sich jetzt so schreiben:

$$\prod_{\mathfrak{p}}\frac{(1-N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}s})^{hf_{\mathfrak{p}}^{-1}}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}(1-s)})^{hf_{\mathfrak{p}}^{-1}}}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{(1-N(\mathfrak{p})^{-f'_{\mathfrak{p}}s})^{hf'^{-1}_{\mathfrak{p}}}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-f'_{\mathfrak{p}}(1-s)})^{hf'^{-1}_{\mathfrak{p}}}}$$

und zu

$$\prod_{\mathfrak{p}}\frac{(1-N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}s})^{hf_{\mathfrak{p}}^{-1}}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-f_{\mathfrak{p}}(s-1)})^{hf_{\mathfrak{p}}^{-1}}}=\varepsilon\prod_{\mathfrak{p}}\frac{(1-N(\mathfrak{p})^{-f'_{\mathfrak{p}}s})^{hf'^{-1}_{\mathfrak{p}}}}{(1-N(\mathfrak{p})^{-f'_{\mathfrak{p}}(s-1)})^{hf'^{-1}_{\mathfrak{p}}}}$$

umformen, wo ε eine Einheitswurzel bedeutet. Da beide Seiten in absolut konvergente Dirichlet-Reihen entwickelt werden können, müssen sie identisch sein, d.h. $f_{\mathfrak{p}}=f'_{\mathfrak{p}}$.

Hilfssatz 5. *Die Galoissche Gruppe von K_1/k ist mit der Idealklassengruppe in k isomorph.*

Dem eigentlichen Beweis ist eine Vorbereitung vorauszuschicken: das Polynom $g(x) = \Pi(x - \xi_i)$ ist in k irreduzibel. Es seien nämlich ξ_i, ξ_j irgend zwei Nullstellen. Dann gilt mit einer der Permutationen σ'_C von § 1: $\xi_j = \xi_i^{\sigma'_C}$. Nach Hilfssatz 1 ist jetzt $\xi_j = \xi_i^{\sigma_C^{\pm 1}}$, und nach Hilfssatz 2 ist $\sigma_C^{\pm 1}$ der Frobenius-Automorphismus unendlich vieler Primideale $\mathfrak{P}$ von K, welche Primideale $\mathfrak{p}$ ersten Grades von k teilen. Wenn nun $K > k$ war, so läßt $\sigma_C^{\pm 1}$ den Unterkörper k fest, und das Produkt $(x - \xi_i)(x - \xi_j)$ gehört zu dem gleichen in k irreduziblen Faktor von $g(x)$. Wenn aber nicht $K > k$ war, so zeigt dieser Schluß jedenfalls, daß $g(x)$ in k_0 irreduzibel ist, und die Körpererweiterung $k_0 \to k$ kann jetzt nichts an der Irreduzibilität ändern.

Es gibt also zu jedem Paar ξ_i, ξ_j einen Automorphismus σ_C von K_1/k, für den $\xi_j = \xi_i^{\sigma_C}$ gilt. Nun ist aber gezeigt worden, daß der Grad $[K_1 : k]$ gleich der Anzahl h der ξ_i ist. Folglich gibt es außer diesen σ_C keine weiteren Automorphismen von K_1/k, und die in Hilfssatz 1 behauptete Abbildung $\sigma'_C \to \sigma_C$ ist auch eindeutig. Endlich geht aus Hilfssatz 1 hervor, daß diese Abbildung für jede zyklische Untergruppe von $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G}$ ein Isomorphismus ist.

Es liegt jetzt der folgende Sachverhalt vor: Die Gruppe $\mathfrak{H}'$ der σ'_C (welche mit der Klassengruppe von k isomorph und daher abelsch ist) ist umkehrbar eindeutig auf die Galois-Gruppe $\mathfrak{H}$ von K_1/k abgebildet, und diese Abbildung ist für jede zyklische Untergruppe von $\mathfrak{H}'$ ein Isomorphismus. Nach Hilfssatz 3 gilt für je zwei Elemente σ_1, σ_2 von $\mathfrak{H}$: $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^{\pm 1}$. Eine Reihe von elementaren rein gruppentheoretischen Schlüssen zeigt jetzt die Isomorphie der Gruppen $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}$. Wir numerieren diese Schlüsse mit a) bis p); in a) bis g) werden folgende Abkürzungen benutzt: $\mathfrak{Z}$ = Zentrum von $\mathfrak{H}$; σ, σ_u, σ_{2^n} seien ein beliebiges Element von $\mathfrak{H}$, ein solches von ungerader Ordnung und eines der Ordnung 2^n.

a) $\sigma_2 \in \mathfrak{Z}$, denn nach Hilfssatz 3 ist $\sigma^{-1}\sigma_2\sigma = \sigma_2$. – b) $\sigma_u \in \mathfrak{Z}$, denn nach Hilfssatz 3 ist $\sigma_u^{-1}\sigma\sigma_u = \sigma^{\pm 1}$, also $\sigma_u^{-u}\sigma\sigma_u^u = \sigma^{\pm 1} = \sigma$. – c) $\sigma^2 \in \mathfrak{Z}$. d) $\sigma_{2^n} \in \mathfrak{Z}$ für $n > 2$. Denn nach c) ist $\sigma^{-1}\sigma_{2^n}^2\sigma = \sigma_{2^n}^2$ und nach Hilfssatz 3 $(\sigma^{-1}\sigma_{2^n}\sigma)^2 = (\sigma_{2^n}^{\pm 1})^2$; das untere Vorzeichen ist falsch, wenn $n > 2$ ist. – e) $\mathfrak{Z} = \mathfrak{H}$, falls $\mathfrak{H}$ ein σ_u enthält. Denn nach a) bis d) müssen alle Elemente außerhalb von $\mathfrak{Z}$ die Ordnung 4 haben. Ist σ_4 ein solches, so liegt auch $\sigma_u\sigma_4$ außerhalb $\mathfrak{Z}$, hat aber die Ordnung $4u$. – f) $\mathfrak{Z} = \mathfrak{H}$, falls $\mathfrak{H}$ ein σ_{2^n} mit $n > 2$ enthält. Beweis wie unter e). – g) $\mathfrak{Z} = \mathfrak{H}$, falls $\mathfrak{H}$ nur Elemente der Ordnung 2 enthält. Beweis nach a).

Es wird jetzt angenommen, daß $\mathfrak{H}$ nicht kommutativ sei. Wegen e) bis g) enthält dann $\mathfrak{H}$ nur Elemente der Ordnungen 2 und 4, letztere auch wirklich. Ein Beispiel für eine solche Gruppe ist die Quaternionengruppe; wir zeigen, daß es im wesentlichen auch die einzige ist. h) σ_1, σ_2 seien zwei nicht vertauschbare Elemente der Ordnung 4. Aus Hilfssatz 3 folgt $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2^{-1}$, daraus weiter $\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1} = \sigma_1\sigma_2^{-2}$. Ebenfalls nach Hilfssatz 3 ist dies gleich σ_1^{-1}, also ist $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Wir nennen dies Element σ_0. Weiter folgt $(\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_0$. Mithin erzeugen σ_1, σ_2 die Quaternionengruppe. – i) Jedes Element $\sigma \neq \sigma_1^{\varepsilon_1}\sigma_2^{\varepsilon_2}$ in $\mathfrak{H}$ hat die Gestalt $\sigma = \sigma_1^{\varepsilon_1}\sigma_2^{\varepsilon_2}\sigma_3$, wobei σ_3 mit σ_1, σ_2 vertauschbar ist. σ sei nicht

mit σ_1, σ_2 vertauschbar und daher nach h) $\sigma_\varrho^{-1}\sigma\sigma_\varrho = \sigma_0^{\varepsilon_\varrho}\sigma$ mit $\varepsilon_\varrho = 0$ oder 1 für $\varrho = 1, 2$. Jetzt ist aber $\sigma_3 = \sigma_1^{\varepsilon_2}\sigma_2^{\varepsilon_1}\sigma$ mit σ_1, σ_2 vertauschbar. — j) Für dieses Element σ_3 gilt nicht $\sigma_3^2 = \sigma_0$. Das ist klar, wenn σ_3 die Ordnung 2 hat; hat aber σ_3 die Ordnung 4, so folgte aus $\sigma_3^2 = \sigma_0$: $(\sigma_3\sigma_1)^2 = 1$. Also $\sigma' = \sigma_3\sigma_1$ gehörte nach a) dem Zentrum an. Dann wäre aber $\sigma_3 = \sigma'\sigma_1^{-1}$ nicht mit σ_2 vertauschbar. k) Nach e) bis j) ist $\mathfrak{H}$ das direkte Produkt einer abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ und r Quaternionengruppen $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_r$. In den nächsten Beweisschritten wird nun $r = 0$ gezeigt werden, d.h. $\mathfrak{H}$ ist abelsch.

l) In dem direkten Produkt $\mathfrak{Q}_1 \times \cdots \times \mathfrak{Q}_r$ gibt es $2^{3r} - 2^r$ Elemente der Ordnung 4 und $2^r - 1$ Elemente der Ordnung 2; diese sind sämtlich Quadrate von Elementen der Ordnung 4. — m) Die Ordnungen und die Anzahlen der Elemente der Ordnungen 4 und 2, sowie die Anzahlen der Nichtquadrate unter den letzteren für die Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$ seien a, h; a_4, h_4; a_2, h_2; $a_{2'}, h_{2'}$. Es gilt dann nach l):

$$h = 2^{3r}a, \quad h_4 = 2^{3r}a - 2^r(a_2 + 1), \quad h_2 = 2^r(a_2 + 1) - 1, \quad h_{2'} = 2^r a_{2'}.$$

n) Ist $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt von s_4 zyklischen Gruppen der Ordnung 4 und von s_2 zyklischen Gruppen der Ordnung 2, so werden diese Anzahlen

$$(16) \qquad h_4 = 2^{2s_4+s_2+3r} - 2^{s_4+s_2+r}, \quad h_2 = 2^{s_4+s_2+r} - 1, \quad h_{2'} = 2^{s_4+r}(2^{s_2} - 1).$$

o) Wie oben festgestellt wurde, sind die entsprechenden Anzahlen für die (mit der Klassengruppe in k isomorphe und daher abelsche) Gruppe $\mathfrak{H}'$ gleich groß. Diese sei das Produkt von s_4' bzw. s_2' zyklischen Gruppen der Ordnungen 4 bzw. 2. Dann ist

$$h_4' = h_4 = 2^{2s_4'+s_2'} - 2^{s_4'+s_2'}, \quad h_2' = h_2 = 2^{s_4'+s_2'} - 1, \quad h_{2'}' = h_{2'} = 2^{s_4'}(2^{s_2'} - 1).$$

Vergleich mit (16) führt nun auf die Gleichungen

$$2s_4' + s_2' = 2s_4 + s_2 + 3r, \qquad s_2' = s_2,$$
$$s_4' + s_2' = s_4 + s_2 + r, \qquad s_4' = s_4 + r.$$

Daraus folgt $r = 0$, also $\mathfrak{H}$ ist kommutativ.

p) Vergleicht man ebenso die Anzahlen der Elemente aller möglichen Ordnungen in $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$, wobei man jetzt weiß, daß beide Gruppen abelsch sind, so ergibt sich die behauptete Isomorphie. Damit ist aber keineswegs erwiesen, daß die in § 3 definierte Abbildung ein Isomorphismus ist.

Hilfssatz 6. *Mit dem Automorphismus σ von Hilfssatz 4 gilt* $\sigma^{-1}\sigma_C\sigma = \sigma_C^{-1}$.

Beweis. Nach Hilfssatz 3 ist $\sigma^{-1}\sigma_C\sigma = \sigma_C^{e(C)}$ mit $e(C) = \pm 1$. Zunächst kann man zeigen, daß $e(C)$ von C nicht abhängt. Da die Transformation mit σ ein Automorphismus der Gruppe ist, gilt für zwei Elemente

$$\sigma_{C_1}, \sigma_{C_2} : (\sigma_{C_1}\sigma_{C_2})^{e(C_1C_2)} = \sigma_{C_1}^{e(C_1)}\sigma_{C_2}^{e(C_2)}.$$

Sind nun zwei dieser Koeffizienten gleich, so muß auch der dritte damit übereinstimmen (oder $\sigma_{C_1}, \sigma_{C_2}$ oder $\sigma_{C_1}\sigma_{C_2}$ hat die Ordnung 2, und dann kann man natürlich $e(C_1), e(C_2)$ bzw. $e(C_1C_2)$ modulo 2 abändern).

Damit ist entweder die Behauptung des Hilfssatz 5 bewiesen, oder es gilt durchweg $\sigma^{-1}\sigma_C\sigma = \sigma_C$. In diesem Falle müßte entweder K/k_0 das direkte Produkt eines quadratischen Zahlkörpers und eines abelschen Zahlkörpers des Grades h sein, was wegen der Irreduzibilität der erzeugenden Gleichung $g(x) = 0$ von K gewiß nicht zutrifft. Oder aber σ ist der identische Automorphismus von K. In diesem Falle läßt sich zeigen, daß die Gruppe $\mathfrak{H}$ nur Elemente der Ordnung 2 enthält, und dann ist Hilfssatz 2 auch richtig.

Wie man aus Fourier-Reihe entnimmt, ist

$$j(-\bar{\tau}) = j(\bar{\tau}).$$

Setzt man $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, so wird also der Automorphismus σ durch die Abbildung $\tau_i \to \varepsilon(\bar{\tau}_i)$ induziert. Die $\bar{\tau}_i$ sind aber die Wurzeln mit negativem Imaginärteil der den Ordnungen $\mathfrak{o}_i$ zugeordneten Gln. (4). Man kann daher die Permutationen σ'_C und σ auch als Permutationen der Klassen isomorpher Ordnungen $\mathfrak{o}_i$ studieren. Berechnen wir jetzt $\bar{\sigma}'_C = \sigma^{-1}\sigma'_C\sigma$! Dazu wird zunächst $\mathfrak{o}_i$ mit ε transformiert und $\mathfrak{o}_k = \varepsilon\,\mathfrak{o}_i\,\varepsilon^{-1}$ gesetzt. Dann sei $\mathfrak{a}_i$ ein $\mathfrak{o}_i$-Ideal in der Klasse C und $\mathfrak{a}_k$ das $\mathfrak{a}_i$ zugeordnete Ideal von $\mathfrak{o}_k$. Da $n(\varepsilon) = -1$ ist, ist dieses nach § 1 das zu $\varepsilon\,\mathfrak{a}_i\,\varepsilon^{-1}$ konjugierte, d.h. $\mathfrak{a}_k = \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}_i\,\varepsilon^{-1}$. Endlich ist nun $\mathfrak{o}_i^{\bar{\sigma}'_C} = \varepsilon\,\alpha_k\,\mathfrak{o}_k\,\alpha_k^{-1}\,\varepsilon^{-1}$, wo $\mathfrak{O}\alpha_k = \mathfrak{O}\,\mathfrak{a}_k = \mathfrak{O}\,\bar{\mathfrak{a}}_i\,\varepsilon^{-1}$. Schreibt man $\mathfrak{O}\,\bar{\mathfrak{a}}_i = \mathfrak{O}\bar{\alpha}_i$ mit $n(\bar{\alpha}_i) > 0$, so kann man $\alpha_k = \varepsilon\,\bar{\alpha}_i\,\varepsilon^{-1}$ nehmen. Das macht $\mathfrak{o}_i^{\bar{\sigma}'_C} = \bar{\alpha}_i\,\mathfrak{o}_i\,\bar{\alpha}_i^{-1} = \mathfrak{o}_i^{\sigma'_{\bar{C}}}$, also es gilt $\sigma^{-1}\sigma'_C\sigma = \sigma'_{\bar{C}} = \sigma'^{-1}_C$. Wenn jetzt aber σ der identische Automorphismus wäre, müßten alle σ_C die Ordnung 2 haben, also auch alle C, w.z.b.w.

Mit dem folgenden Hilfssatz wird der Ausgangspunkt der analytischen Schlußweise zu Beginn des Paragraphen erreicht.

Hilfssatz 7. *Die Primideale zweiten Grades von k werden bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen in K_1 voll zerlegt.*

Beweis nach H. Hasse[4]). Da K_1/k durch die in k irreduzible Gleichung $g(x) = 0$ erzeugt wird und relativ abelsch ist, lassen sich die Automorphismen von K_1/k in der Form

$$\xi_i^{\sigma'_C} = R_C(\xi_i) \tag{17}$$

mit einem von dem Index i unabhängigen Polynom $R_C(x)$ mit Koeffizienten in k ausdrücken. Aus (17) und Hilfssatz 5 folgt

$$R_{C^{-1}}(x) = R_{\bar{C}}(x) = \bar{R}_C(x). \tag{18}$$

Es sei nun σ'_0 der Frobenius-Automorphismus eines in einem Primideal (ϕ) zweiten Grades von k aufgehenden Primideals $\mathfrak{P}$ bezüglich k_0, also

$$\xi_i^{\sigma'_0} \equiv \xi_i^p \bmod \mathfrak{P}. \tag{19}$$

Der Index i werde festgehalten. Es gibt dann nach § 1 unter den Permutationen σ_C eine, für die $\xi_i^{\sigma_C} = \xi_i^{\sigma'_0}$ ist. Nach Hilfssatz 1 gibt es unter den

[4]) Siehe die zweite unter [1]) genannte Arbeit.

Automorphismen σ_C' einen, welcher dasselbe leistet: $\xi_i^{\sigma_C'\sigma} = \xi_i^{\sigma_0'}$. Jetzt folgt aus (17) und (19)

$$\xi_i^{\mathfrak{p}} \equiv R_C(\xi_i) \bmod \mathfrak{P},$$

weiter, da $(\mathfrak{p})$ in k ein Primideal zweiten Grades ist,

$$\xi_i^{\mathfrak{p}^2} \equiv R_C(\xi_i)^{\mathfrak{p}} \equiv \overline{R}_C(\xi_i^{\mathfrak{p}}) \bmod \mathfrak{P}.$$

Das ist nach (18)

$$\xi_i^{\mathfrak{p}^2} \equiv R_{\overline{C}}(\xi_i^{\mathfrak{p}}) \equiv R_{\overline{C}}(\xi_i^{\sigma_0'}) = \xi_i \bmod \mathfrak{P}.$$

Da diese Kongruenz für alle Indizes i gilt, zerfällt $(\mathfrak{p})$ wenigstens dann, wenn alle ξ_i und alle Differenzen $\xi_i - \xi_k$ $\mathfrak{p}$-adische Einheiten sind.

Schlußbemerkung. Gestützt auf Hilfssatz 6 kann man leicht zeigen, daß für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von k stets eine der folgenden Kongruenzen gilt:

$$\xi_i^{\sigma_C\sigma} = \xi_i \bmod \mathfrak{p}, \qquad \xi_i^{\sigma_C\sigma} \equiv \xi_i \bmod \overline{\mathfrak{p}},$$

wo C die Idealklasse bedeutet, welcher $\mathfrak{p}$ angehört. Die ausnahmslose Gültigkeit einer dieser Kongruenzen ist die Aussage des Artinschen Reziprozitätsgesetzes. Es ist klar, daß hierzu weiterreichende Hilfsmittel notwendig sind, welche zwischen einem Ideal und seinem konjugierten zu unterscheiden gestatten. Das Fehlen eines solchen Hilfsmittels bedeutete für den hier gelieferten Beweis eine formale Schwierigkeit, da es an Stelle der Gleichheit $\sigma_C = \sigma_C'$ nur gelang, den Hilfssatz 1 zu beweisen, und nur die längere elementare Diskussion im Beweis des Hilfssatzes 5 erlaubte die Bewältigung dieser Schwierigkeit.

Münster, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 5. Mai 1955)

Kasch, F.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 243—257 (1956)

Abschätzung der Dichte von Summenmengen

(Zweite Mitteilung)

Von

Friedrich Kasch

§ 1. Fragestellung

In einer kürzlich erschienenen Arbeit mit dem gleichen Titel [2][1]) habe ich Abschätzungen der Dichte von Summenmengen, bei denen einer der Summanden eine Basis endlicher Ordnung der natürlichen Zahlen ist, aufgestellt. Richtunggebend für diese Untersuchungen war eine Vermutung von P. Erdös, die folgendes besagt: Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge natürlicher Zahlen der Dichte α, $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Basis der natürlichen Zahlen der mittleren Ordnung λ und γ die Dichte der Summenmenge $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, dann gilt[2])

$$\gamma \geq \alpha\left(1+\frac{1-\alpha}{\lambda}\right). \tag{1.1}$$

In (I) habe ich Verbesserungen der bisherigen Abschätzungen angegeben, ohne jedoch diese Vermutung erreichen zu können.

Inzwischen bemerkte ich, daß man die Schlußweise aus (I) so weit ausbauen kann, daß damit (1.1) für hinreichend kleine α nicht nur erreicht, sondern übertroffen wird. Genauer: *Zu jedem λ gibt es ein positives Intervall $0<\alpha<\alpha_\lambda$, wo eine bessere Abschätzung als* (1.1) *gilt. Eine entsprechende Aussage besteht auch für die asymptotischen Dichten und die asymptotische mittlere Ordnung.*

Der Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung der in (I) aufgestellten und als Grundformeln bezeichneten Abschätzungen. Aus diesen verallgemeinerten Grundformeln kann dann auf zwei verschiedenen Wegen das genannte Ergebnis hergeleitet werden. Bei dieser Herleitung können wir uns im wesentlichen auf die ausführliche Darstellung in (I) stützen. Es werden hier die gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in (I) benutzt. Außerdem setzen wir hier sogleich $\alpha>0$ und $\lambda>1$ voraus, da sonst diese trivialen Fälle die Formulierung erschweren.

Zum Schluß deuten wir an, wie unsere Überlegungen auf Gitterpunktmengen im r-dimensionalen Raum ausgedehnt werden können. Das ist insofern von Interesse, als es bisher nicht gelungen ist, Dichteabschätzungen für die Summenmenge von zwei beliebigen Mengen positiver Dichte in dieser Richtung zu verallgemeinern[3]).

[1]) Diese Arbeit wird im folgenden mit (I) zitiert.

[2]) Siehe [6], S. 7; tatsächlich hat P. Erdös diese Vermutung für die Ordnung h an Stelle von λ ausgesprochen.

[3]) In dieser Richtung liegt in der Literatur lediglich eine Arbeit von L. Cheo [1] vor; dort wird eine Verallgemeinerung der Schnirelmannschen Ungleichung auf den

§ 2. Die komplementären Grundformeln

1. Die Verallgemeinerung gegenüber (I) besteht vor allem darin, daß jetzt an Stelle der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ in der Definition der Funktionen $D(m)$, $E(m)$ und $\overline{E}(m)$ beliebige Mengen $\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{Q}}$ mit

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

treten. Dies sei also im folgenden der Fall. Ferner seien n eine feste natürliche Zahl und m eine natürliche Zahl mit $1 \leq m \leq n$.

Definitionen:

$D(m)$ sei gleich der Anzahl der verschiedenen Paare $(p, \overline{q})$ mit $p \in \mathfrak{P}(n)$, $\overline{q} \in \overline{\mathfrak{Q}}(n)$ und $\overline{q} - p = m$;

$E(m)$ sei gleich der Anzahl der verschiedenen Paare (p, q) mit $p \in \mathfrak{P}(n)$, $q \in \mathfrak{Q}(n)$ und $q - p = m$;

$\overline{E}(m)$ sei gleich der Anzahl der verschiedenen Paare $(\overline{p}, \overline{q})$ mit $\overline{p} \in \overline{\mathfrak{P}}(n)$, $\overline{q} \in \overline{\mathfrak{Q}}(n)$ und $\overline{q} - \overline{p} = m$.

Aus diesen Definitionen erhält man unmittelbar die

Folgerungen:

1. $D(m)$ ist gleich der Anzahl der Zahlen $p \in \mathfrak{P}(n)$ mit $p + m \in \overline{\mathfrak{Q}}(n)$;
2. $D(m)$ ist gleich der Anzahl der Zahlen $\overline{q} \in \overline{\mathfrak{Q}}(n)$ mit $\overline{q} - m \in \mathfrak{P}(n)$;
3. $E(m)$ ist gleich der Anzahl der Zahlen $p \in \mathfrak{P}(n)$ mit $p + m \in \mathfrak{Q}(n)$;
4. $\overline{E}(m)$ ist gleich der Anzahl der Zahlen $\overline{q} \in \overline{\mathfrak{Q}}(n)$ mit $\overline{q} - m \in \overline{\mathfrak{P}}(n)$.

Aus der 1. und 3. Folgerung ergibt sich offenbar die Gleichung $D(m) + E(m) = P(n - m)$, also

$$D(m) = P(n - m) - E(m). \tag{2.1}$$

Entsprechend erhält man aus der 2. und 4. Folgerung $D(m) + \overline{E}(m) = \overline{Q}(n) - \overline{Q}(m)$, also

$$D(m) = \overline{Q}(n) - \overline{Q}(m) - \overline{E}(m). \tag{2.2}$$

Die weiteren Überlegungen zielen darauf ab, in (2.1) und (2.2) $D(m)$ nach oben und die rechten Seiten nach unten abzuschätzen.

2. Es soll also zunächst $D(m)$ nach oben abgeschätzt werden, wobei die Basiseigenschaft von $\mathfrak{B}$ benutzt wird.

Hilfssatz 1. Ist t eine natürliche Zahl mit $1 \leq t < m$ und $b \in \mathfrak{B}$, dann gilt

$$D(m) \leq D(t) + D(m - t) + Q(n) - P(n), \tag{2.3}$$

$$D(b) \leq C(n) - Q(n) + P(n) - A(n). \tag{2.4}$$

---

zweidimensionalen Fall unter der Voraussetzung vorgenommen, daß eine der beiden betrachteten Mengen alle ganzzahligen Punkte einer der positiven Halbachsen enthält; in diesem Falle läßt sich die lineare Schlußweise anwenden. Darüber hinaus wird gezeigt, daß eine genaue Verallgemeinerung des Satzes von H. B. MANN auf die Ebene nicht möglich ist.

Beweis. Zum Beweis von (2.3) stützen wir uns auf die 1. Folgerung. Es sei p eine Zahl, die in $D(m)$ gezählt wird, d.h. $p+m=\overline{q}\in\overline{\mathfrak{Q}}(n)$. Ist bereits $p+t\in\overline{\mathfrak{Q}}(n)$, dann wird p in $D(t)$ gezählt. Ist jedoch $p+t\in\mathfrak{Q}(n)$, so unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall. $p+t$ liegt bereits in $\mathfrak{P}(n)$: $p+t=p'\in\mathfrak{P}(n)$. Dann wird p' in $D(m-t)$ gezählt, denn es ist $p'+m-t=p+m=\overline{q}\in\overline{\mathfrak{Q}}(n)$. Zu beachten ist dabei, daß die so zugeordneten Zahlen p' für verschiedene p verschieden sind.

2. Fall. $p+t$ liegt [in $\mathfrak{Q}(n)$, aber] nicht in $\mathfrak{P}(n)$. Die Anzahl aller Zahlen aus $\mathfrak{Q}(n)$, die nicht in $\mathfrak{P}(n)$ liegen, ist offenbar gleich $Q(n)-P(n)$. Damit ist (2.3) vollständig bewiesen.

Zum Beweis von (2.4) sei $b\in\mathfrak{B}(n)$ und $p+b-\overline{q}\in\overline{Q}(n)$. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle.

1. Fall. p liegt bereits in $\mathfrak{A}(n)$: $p=a$. Dann ist $a+b=\overline{q}$ ein Element aus $\mathfrak{C}(n)$, das nicht in $\mathfrak{Q}(n)$ liegt, und die Anzahl aller Elemente aus $\mathfrak{C}(n)$, die nicht in $\mathfrak{Q}(n)$ liegen, ist gleich $C(n)-Q(n)$.

2. Fall. p ist ein Element aus $\mathfrak{P}(n)$, das nicht in $\mathfrak{A}(n)$ liegt. Die Anzahl aller derartigen Elemente ist gleich $P(n)-A(n)$. Damit ist (2.4) bewiesen.

Sei nun $m=b_1+\cdots+b_{l(m)}$ $(b_i\in\mathfrak{B})$ eine nach Voraussetzung existierende Darstellung von m, so besteht auf Grund von (2.3) und (2.4) die Ungleichung

$$\begin{aligned}D(m)&\leqq l(m)\{C(n)-Q(n)+P(n)-A(n)\}+\{l(m)-1\}\{Q(n)-P(n)\}\\&=l(m)\{C(n)-A(n)\}-\{Q(n)-P(n)\}.\end{aligned}$$

Daraus erhält man durch Summation von 1 bis $k\leqq n$ unter Beachtung der Definition der mittleren Ordnung λ:

$$\sum_{m=1}^{k}D(m)\leqq\lambda k\{C(n)-A(n)\}-k\{Q(n)-P(n)\}. \tag{2.5}$$

3. Es sollen nun die rechten Seiten von (2.1) und (2.2) nach unten abgeschätzt werden. Wir setzen

$$\Gamma(k)=\sum_{m=1}^{n-k-1}P(m)\{Q(m+k+1)-Q(m+k)\}^{4}), \tag{2.6}$$

$$\Delta(n)=\sum_{m=1}^{n}E(m) \tag{2.7}$$

und entsprechend

$$\overline{\Gamma}(k)=\sum_{m=1}^{n-k-1}\overline{P}(m)\{\overline{Q}(m+k+1)-\overline{Q}(m+k)\}, \tag{2.8}$$

$$\overline{\Delta}(n)=\sum_{m=1}^{n}\overline{E}(m). \tag{2.9}$$

[4]) Eine Summe, bei der die untere Summationsgrenze größer als die obere ist, sei gleich Null. (Dies ist hier für $k=n-1$ und $k=n$ der Fall.)

Hilfssatz 2. Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$(2.10)\quad \sum_{m=1}^{k} E(m) = \Delta(n) - \Gamma(k) \leq \binom{P(n)}{2} + \{Q(n) - P(n)\}\, P(n) - \Gamma(k);$$

$$(2.11)\quad \sum_{m=1}^{k} \overline{E}(m) = \overline{\Delta}(n) - \overline{\Gamma}(k) \leq \binom{\overline{Q}(n)}{2} + \{\overline{P}(n) - \overline{Q}(n)\}\,\overline{Q}(n) - \overline{\Gamma}(k).$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die in (2.10) und (2.11) links stehenden Gleichungen. Für $k = n-1$ und $k = n$ sind diese offenbar erfüllt. Für $k \leq n-2$ ist zum Beweis der in (2.10) auftretenden Gleichung offenbar

$$(2.12)\quad \sum_{m=k+1}^{n} E(m) = \Gamma(k) = \sum_{m=1}^{n-k-1} P(m)\,\{Q(m+k+1) - Q(m+k)\}$$

nachzuweisen. Nach Definition von $E(m)$ werden in der links stehenden Summe alle verschiedenen Paare (p, q) mit $p \in \mathfrak{P}(n)$, $q \in \mathfrak{Q}(n)$ und $q - p \geq k+1$ gezählt. Die Anzahl dieser Paare ist bei festem q offenbar gleich $P(q-k-1)$. Durch Summation über alle $q \in \mathfrak{Q}(n)$ mit $q \geq k+2$ (denn nur solche q kommen wegen $p > 0$ in Frage) erhält man

$$\sum_{m=k+1}^{n} E(m) = \sum_{\substack{q \in \mathfrak{Q}(n) \\ q \geq k+2}} P(q-k-1).$$

Wegen

$$Q(m) - Q(m-1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \in \mathfrak{Q} \\ 0 & \text{falls } m \notin \mathfrak{Q} \end{cases}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} \sum_{m=k+1}^{n} E(m) &= \sum_{m=k+2}^{n} P(m-k-1)\,\{Q(m) - Q(m-1)\} \\ &= \sum_{m=1}^{n-k-1} P(m)\,\{Q(m+k+1) - Q(m+k)\} = \Gamma(k), \end{aligned}$$

womit (2.12) bewiesen ist. Die gleiche Überlegung für die komplementären Mengen liefert die in (2.11) stehende Gleichung.

Zum Beweis von (2.10) und (2.11) sind noch die Abschätzungen

$$(2.13)\quad \Delta(n) = \sum_{m=1}^{n} E(m) \leq \binom{P(n)}{2} + \{Q(n) - P(n)\}\, P(n),$$

$$(2.14)\quad \overline{\Delta}(n) = \sum_{m=1}^{n} \overline{E}(m) \leq \binom{\overline{Q}(n)}{2} + \{\overline{P}(n) - \overline{Q}(n)\}\,\overline{Q}(n)$$

nachzuweisen. In $\sum_{m=1}^{n} E(m)$ werden alle verschiedenen Paare (p, q) mit $p \in \mathfrak{P}(n)$, $q \in \mathfrak{Q}(n)$ und $q - p > 0$ gezählt. Wegen $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q}$ werden dabei auch alle Paare (p, p') mit $p, p' \in \mathfrak{P}(n)$ und $p' - p > 0$ gezählt, und diese Anzahl ist gleich $\binom{P(n)}{2}$. Es bleibt dann noch die Anzahl der Paare (p, q) mit $p \in \mathfrak{P}(n)$,

$q \in \mathfrak{Q}(n)$, aber $q \notin \mathfrak{P}(n)$ und $q - p > 0$ abzuschätzen. Läßt man die Forderung $q - p > 0$ fallen, so ist diese Anzahl genau gleich $\{Q(n) - P(n)\} P(n)$. Damit ist (2.13) bewiesen. Zum Beweis von (2.14) beachte man $\overline{\mathfrak{Q}} \subseteq \overline{\mathfrak{P}}$ und schließe sinngemäß.

4. Aus (2.1), (2.5) und (2.10) erhält man die folgende

1. Grundformel[5]):

$$(2.15)\quad \begin{cases} \lambda k\{C(n) - A(n)\} - k\{Q(n) - P(n)\} \geqq \sum\limits_{m=n-k}^{n-1} P(m) + \\ + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} P(m)\{Q(m+k+1) - Q(m+k)\} - \binom{P(n)}{2} \quad \{Q(n) - P(n)\} P(n). \end{cases}$$

Entsprechend folgt aus (2.2), (2.6) und (2.11) die

2. Grundformel:

$$(2.16)\quad \begin{cases} \lambda k\{C(n) - A(n)\} - k\{Q(n) - P(n)\} \geqq k\overline{Q}(n) - \sum\limits_{m=1}^{k} \overline{Q}(m) + \\ + \sum\limits_{m=1}^{n-k-1} \overline{P}(m)\{\overline{Q}(m+k+1) - \overline{Q}(m+k)\} - \binom{\overline{Q}(n)}{2} - \{\overline{P}(n) - \overline{Q}(n)\}\overline{Q}(n). \end{cases}$$

Für $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{A}$ erhält man daraus die Grundformeln aus (I). Im folgenden sollen die Grundformeln in den Spezialfällen $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$ ausgewertet werden.

§ 3. Auswertung der 1. Grundformel für $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$.

1. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis der folgenden Abschätzungen:

Finiter Fall. Setzt man

$$(3.1)\qquad c_1(\alpha) = \frac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1 + \sqrt{\alpha})^2}, \qquad c_3(\alpha, \lambda) = c_1(\alpha)\,\frac{\lambda}{\lambda - 1 + (1+\alpha)\sqrt{\alpha}},$$

dann gilt

$$(3.2)\qquad \frac{C(n)}{n} > \alpha\left(1 + c_3(\alpha, \lambda)\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right)^{6}).$$

Asymptotischer Fall. Besteht mit den durch (3.1) gegebenen Funktionen die Ungleichung

$$(3.3)\quad (\lambda^* - 1)\sqrt{\alpha^*} + \alpha^*\left\{\frac{3}{2}(1 + \alpha^*) - \sqrt{\alpha^*}\right\} > \alpha^*(1+\alpha^*)\left(1 + c_3(\alpha^*, \lambda^*)\,\frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right),$$

dann gilt

$$(3.4)\qquad \gamma^* \geqq \alpha^*\left(1 + c_3(\alpha^*, \lambda^*)\,\frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right).$$

Die Voraussetzung (3.3), die im finiten Fall fehlt, stellt keine wesentliche Einschränkung dar, denn z.B. für $\lambda^* \geqq \frac{3}{2}$ ist sie bereits identisch in α^*

[5]) Man beachte Fußnote 4 auf S. 245.

[6]) In (I) wurde diese Ungleichung mit $c_1(\alpha)$ an Stelle von $c_3(\alpha, \lambda)$ hergeleitet.

erfüllt, und zu jedem kleineren λ^* gibt es eine positive Zahl α_0^*, so daß (3.3) für alle $\alpha^* < \alpha_0^*$ richtig ist.

Das Wesentliche an $c_3(\alpha, \lambda)$ ist die Tatsache, daß

$$\lim_{\alpha \to 0} c_3(\alpha, \lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \tag{3.5}$$

gilt. Daraus und aus der vorhergehenden Bemerkung folgt, daß es zu jedem λ bzw. λ^* positive Zahlen α_λ bzw. $\alpha_{\lambda^*}^*$ gibt, so daß für alle $\alpha < \alpha_\lambda$ bzw. $\alpha^* < \alpha_{\lambda^*}^*$ die ERDÖSsche Vermutung (1.1) bzw. die entsprechend asymptotische Ungleichung übertroffen werden.

In der Abbildung in (I) ist $c_3(\alpha, \lambda)$ für $\lambda = \frac{19}{6}$ eingetragen. In diesem Falle kann $\alpha_\lambda > \frac{1}{9}$ gewählt werden.

2. Als Hilfsmittel zum Beweis leiten wir jetzt einen Reduktionssatz her, der auch an sich von Interesse ist.

Reduktionssatz. *Es sei $\varphi(\alpha)$ eine für $0 \leqq \alpha \leqq 1$ monoton wachsende Funktion von α, und es sei $\mathfrak{B}$ eine die 0 enthaltende Menge nichtnegativer ganzer Zahlen. Gilt dann für alle Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen $\mathfrak{A}$ mit $1 \in \mathfrak{A}$, und alle natürlichen Zahlen n mit $\min\limits_{i=1,\ldots,n} \frac{A(i)}{i} = \frac{A(n)}{n}$ die Ungleichung*

$$(A + B)(n) > \varphi(\alpha)\, n,$$

wobei $(A+B)(n)$ die Anzahlfunktion der Summenmenge $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ und α die Dichte von $\mathfrak{A}$ seien, dann gilt diese Ungleichung für alle natürlichen Zahlen n[7]).

Beweis. Induktion nach n. Für $n = 1$ gilt die Behauptung nach Voraussetzung; sie sei bis $n-1$ bewiesen. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge mit $1 \in \mathfrak{A}$, dann können wir $\min\limits_{i=1,\ldots,n} \frac{A(i)}{i} < \frac{A(n)}{n}$ annehmen, da die Behauptung sonst nach Voraussetzung gilt. Wird das Minimum für $i = m_0$ angenommen, so ist folglich $m_0 < n$. Ferner können wir ohne Einschränkung $\frac{A(m_0)}{m_0} = \alpha$ annehmen, da dies sonst durch Auffüllen der Menge $\mathfrak{A}$ von der Zahl $n+1$ ab erreicht werden kann; dies ändert nichts an $(A+B)(n)$, und die Dichte von $\mathfrak{A}$ wird dabei höchstens vergrößert. Insbesondere gilt dann $\alpha > 0$. Wir betrachten jetzt die Menge $\mathfrak{A}_0 = \{a - m_0\}$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $a > m_0$. Für diese gilt

$$A_0(r) = A(r + m_0) - A(m_0) \geq (r + m_0)\,\alpha - m_0 \alpha = r\alpha, \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

also $\alpha_0 \geqq \alpha > 0$, wenn α_0 die Dichte von $\mathfrak{A}_0$ bezeichne. Für $r = 1$ folgt $1 \in \mathfrak{A}_0$. Nach Induktionsvoraussetzung hat man daher

$$(A_0 + B)(n - m_0) > \varphi(\alpha_0)\,(n - m_0) \geq \varphi(\alpha)\,(n - m_0).$$

[7]) Der Satz gilt auch, wenn man nicht $1 \in \mathfrak{A}$ und nur $(A+B)(n) \geq \varphi(\alpha)\, n$ fordert. — Der Beweisgedanke für diesen Satz findet sich in anderer Form bereits bei D. RAIKOV [5] (beim Beweis des Analogon zum $\alpha - \beta$-Theorem), wo Dichtesätze für Mengen reeller Zahlen bewiesen werden. — Es sei darauf hingewiesen, daß sich die Basisabschätzungen in [5], bei denen der Beweis von ERDÖS-LANDAU [4] in die mengentheoretische Sprechweise übertragen wird, durch Übertragung unserer Überlegungen in analoger Weise verschärfen lassen.

Zusatz bei der Korrektur: Wie mir Herr E. WIRSING mitteilte, war ihm vorstehender Reduktionssatz auch bekannt.

Liegt eine natürliche Zahl $r \leqq n - m_0$ in $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}$, so liegt $r + m_0$ in $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, und zwar im Intervall $m_0 < r + m_0 \leqq n$; also gilt

$$(A_0 + B)(n - m_0) \leqq (A + B)(n) - (A + B)(m_0).$$

Die beiden letzten Ungleichungen zusammen liefern die Behauptung.

Wir weisen darauf hin, daß auf Grund dieses Satzes die Beweise der Abschätzungen in (I) im finiten Fall vereinfacht werden können, da dadurch die Minimalbetrachtung [(I), S. 377] beim Beweis von (I.1.8) und die Untersuchung des Koeffizienten von $A(n)$ [(I), S. 383] beim Beweis von (I.1.9) überflüssig werden.

3. Zum Beweis von (3.2) gehen wir von der 1. Grundformel (2.15) aus, in der wir $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$ setzen:

$$\left\{ \begin{aligned} &(\lambda - 1)\, k\{C(n) - A(n)\} \geqq \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) + \sum_{m=1}^{n-k} A(m)\{C(m + k + 1) - C(m + k)\} - \\ &\quad - \binom{A(n)}{2} - \{C(n) - A(n)\} A(n). \end{aligned} \right.$$

Wegen $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ gilt $C(m + k + 1) - C(m + k) \geqq A(m + k + 1) - A(m + k)$, so daß aus (3.6) folgt:

$$\left\{ \begin{aligned} &(\lambda - 1)\, k\{C(n) - A(n)\} \geqq \sum_{m=n-k}^{n-1} A(m) + \sum_{m=1}^{n-k-1} A(m)\{A(m + k + 1) - A(m + k)\} - \\ &\quad - \binom{A(n)}{2} - \{C(n) - A(n)\} A(n). \end{aligned} \right.$$

Bis auf den Summanden $-\{C(n) - A(n)\} A(n)$ stimmt die rechte Seite dieser Ungleichung mit der rechten Seite von (I.3.1) überein; links steht jetzt jedoch der Faktor $\lambda - 1$ an Stelle von λ in (I.3.1). Wir machen jetzt die Voraussetzung $k \leqq n - 2$ und können dann die auf (I.3.1) folgende Schlußweise unter gewissen Einschränkungen für den vorliegenden Fall übernehmen. Einer erneuten Rechtfertigung bedürfen die dort im Anschluß an (I.3.5) gemachten Voraussetzungen.

Zunächst kann auch jetzt $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ angenommen werden, da sonst bereits $c_1(\alpha)$ besser als $c_3(\alpha, \lambda)$ ist. Ferner kann $n \geqq 4$ angenommen werden, wie jetzt gezeigt werden soll. Ist $C(n) = n$, so folgt (3.2) unmittelbar aus der Tatsache, daß

$$\alpha\left(1 + c_3(\alpha, \lambda)\frac{1 - \alpha}{\lambda}\right) < \alpha + \tfrac{1}{4}\alpha(1 - \alpha) < 1$$

gilt. Dies ist wegen $1 \in \mathfrak{A}$ und $1 \in \mathfrak{B}$ für $n = 1$ und $n = 2$ der Fall, sowie für $n = 3$, wenn $\mathfrak{A}(3) \neq \{1\}$ ist. Sei nun $\mathfrak{A}(3) = \{1\}$; dann ist $\alpha \leqq \frac{1}{3}$. Für $\lambda < \frac{3}{2}$ müssen die Zahlen 1 und 2 in $\mathfrak{B}$ enthalten sein, so daß auch jetzt $C(3) = 3$ folgt. Sei also $\lambda \geqq \frac{3}{2}$; dann gilt

$$\frac{C(3)}{3} \geqq \frac{2}{3} \geqq \alpha + \frac{1}{3} > \alpha + \frac{\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3})}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$$

$$\geqq \alpha\left(1 + \frac{1 - \alpha}{\lambda - 1 + \alpha}\right) > \alpha\left(1 + c_3(\alpha, \lambda)\frac{1 - \alpha}{\lambda}\right).$$

Es darf also jetzt $n \geqq 4$ vorausgesetzt werden.

Ferner kann auch jetzt $\varrho n \geqq 1$ angenommen werden. Ist $\varrho n = \sqrt{\alpha}(1+\sqrt{\alpha})^{-1} n < 1$, so hat man wegen $n \geqq 4$ die Schranke $\alpha < \frac{1}{9}$. Es ist dann zunächst

$$\frac{C(n)}{n} \geqq \frac{2}{n} > \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}};$$

kann die Ungleichung

$$\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} \geqq \alpha\left(1 + c_3(\alpha, \lambda)\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$$

bewiesen werden, so ist man fertig. Diese ist richtig, falls

$$\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} \geqq \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}+1\right) \tag{3.8}$$

gilt, denn es ist

$$\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}+1\right) = \alpha + \sqrt{\alpha} \geqq \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha}} \geqq \alpha\left(1 + c_3(\alpha, \lambda)\,\frac{1-\alpha}{\lambda}\right).$$

Die Ungleichung (3.8) gilt aber wegen $\alpha < \frac{1}{9}$.

Wir können nun ebenso wie im Anschluß an (I.3.5) weiterschließen und erhalten in Analogie zu (I.3.7)

$$(\lambda-1)\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\}\,\frac{C(n)}{n} > \left((\lambda-1)\{(1-\alpha)\varrho+\alpha\} + \alpha\{1-(1-\alpha)\varrho\}\right)\frac{A(n)}{n} - \\ - \frac{1+\alpha}{2}\,\frac{A^2(n)}{n^2} + \frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\,\varrho(2-\varrho) - (1+\alpha)\{C(n)-A(n)\}\,\frac{A(n)}{n^2}.$$

Setzt man darin $\varrho = \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}$ ein, so folgt

$$\left\{\begin{aligned}(\lambda-1)\sqrt{\alpha}\,\frac{C(n)}{n} > \Big((\lambda-1)\sqrt{\alpha} + \alpha\Big\{\frac{3}{2}(1+\alpha) - \sqrt{\alpha}\Big\} - (1+\alpha)\,\frac{C(n)}{n}\Big)\times \\ \times \frac{A(n)}{n} + \frac{(1-\alpha^2)\alpha}{2}\,\frac{\sqrt{\alpha}(1-\sqrt{\alpha})(2-\alpha-\sqrt{\alpha})}{(1-\alpha)^2}.\end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

Auf Grund des Reduktionssatzes können wir darin $\frac{A(n)}{n}$ durch α ersetzen und dann ergibt sich unmittelbar (3.2).

Im asymptotischen Fall erhält man durch eine entsprechende Überlegung eine Formel, die aus (3.9) hervorgeht, wenn man darin überall α durch $\alpha' = \alpha - \varepsilon$, λ durch $\lambda' = \lambda + \mu$ ersetzt und ein Restglied K/n auf der rechten Seite addiert. In dieser Formel darf $\frac{A(n)}{n}$ durch α' ersetzt werden, wenn der Koeffizient von $\frac{A(n)}{n}$ nicht negativ ist. Ist dieser Koeffizient jedoch negativ, so sichert Voraussetzung (3.3) unsere Behauptung; dabei hat man zu berücksichtigen, daß ε und μ so klein gewählt werden können, daß auch für die gestrichenen Größen auf der linken Seite von (3.3) diese Ungleichung richtig bleibt. Durch Grenzübergang folgt schließlich (3.4).

Es soll darauf hingewiesen werden, daß $c_3(\alpha, \lambda)$ [bzw. $c_3(\alpha^*, \lambda^*)$] nicht der beste Faktor ist, den man auf diesem Wege herleiten kann. Eine Verbesserung läßt sich erreichen, indem man ϱ nicht nur in Abhängigkeit von α, sondern

auch noch von λ (und eventuell γ) wählt. Das führt jedoch zu sehr unübersichtlichen Formeln; der so zu gewinnende Faktor hat außerdem auch nur wieder die Eigenschaft, für $\alpha \to 0$ gegen $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$ zu streben. Wir wollen daher nicht weiter auf diese Möglichkeit eingehen.

§ 4. Auswertung der Grundformeln für $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$.

1. Wie schon erwähnt, erhält man die Grundformeln in (I) aus (2.15) und (2.16) für $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{A}$. Wir betrachten hier die aus (2.15) und (2.16) für $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$ folgenden Abschätzungen, bei denen auf der rechten Seite statt A wie in (I) jetzt überall C steht:

$$(4.1)\quad \left\{ \lambda k \{C(n) - A(n)\} \geqq \sum_{m=n-k}^{n-1} C(m) + \sum_{m=1}^{n-k-1} C(m)\{C(m+k+1) - C(m+k)\} - \binom{C(n)}{2}; \right.$$

$$(4.2)\quad \left\{ \lambda k \{C(n) - A(n)\} \geqq k\overline{C}(n) - \sum_{m=1}^{k} \overline{C}(m) + \sum_{m=1}^{n-k-1} \overline{C}(m)\{\overline{C}(m+k+1) - \overline{C}(m+k)\} - \binom{\overline{C}(n)}{2}. \right.$$

Während in (I) aus den Grundformeln die Abschätzungen

$$\frac{C(n)}{n} > \alpha + c_1(\alpha)\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}, \qquad \frac{C(n)}{n} > \alpha + c_1(1-\alpha)\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda}$$

hergeleitet worden waren, erhält man jetzt aus (4.1) und (4.2) die folgenden Abschätzungen, die auch an sich von Interesse sind:

$$(4.3)\qquad \frac{C(n)}{n} > \alpha + c_1(\gamma)\frac{\gamma(1-\gamma)}{\lambda},$$

$$(4.4)\qquad \frac{C(n)}{n} > \alpha + c_1(1-\gamma)\frac{\gamma(1-\gamma)}{\lambda}.$$

Entsprechend erhält man im asymptotischen Fall:

$$(4.5)\qquad \gamma^* \geqq \alpha^* + c_1(\gamma^*)\frac{\gamma^*(1-\gamma^*)}{\lambda^*},$$

$$(4.6)\qquad \gamma^* \geqq \alpha^* + c_1(1-\gamma^*)\frac{\gamma^*(1-\gamma^*)}{\lambda^*}\ [8]).$$

---

[8]) Bei der Andeutung des Beweises der entsprechenden Formel in (I) (Beweis von c_2^*, S. 384), habe ich irrtümlich geschrieben, daß die Schnirelmannsche Ungleichung auch im asymptotischen Falle gelte. Das ist bekanntlich im allgemeinen nicht der Fall und wird auch gar nicht benutzt. Tatsächlich gebraucht wird sie in (I) nur für $\alpha^* > \frac{1}{2}$ und $\beta^* \geqq \frac{2}{27}$ (also $\lambda^* \leq \frac{29}{27}$), da die Behauptung sonst unmittelbar aus der zu (I.4.10) analogen asymptotischen Formel folgt. Aber bereits für $\alpha^* > \frac{1}{2}$ und $\beta^* \geqq \frac{1}{2}$ ergibt sich ihre Gültigkeit aus dem Dichtesatz von M. Kneser [3] (oder auch aus schwächeren Abschätzungen). — Bei dieser Gelegenheit sei noch auf zwei Druckfehler in (I) hingewiesen; auf S. 370, 7. Zeile v. u. muß es „H. Rohrbach [8]" (statt [10]) und auf S. 375, 3. Zeile v. u. „A. Stöhr [11]" (statt [13]) lauten.

Die Beweise können — abgesehen von einer Vereinfachung — fast unmittelbar aus (I) (§§ 3, 4) übernommen werden; man hat dort auf der rechten Seite der Abschätzungen nur überall $A(n), \alpha, \ldots$ durch die entsprechenden Größen $C(n), \gamma, \ldots$ zu ersetzen. Man muß sich lediglich klarmachen, daß die dort für $A(n), \alpha, \ldots$ gemachten Voraussetzungen auch für $C(n), \gamma, \ldots$ gelten. Das soll jetzt erfolgen.

Wir betrachten zunächst den finiten Fall. Wegen $\alpha < 1$ und $1 \in \mathfrak{B}$ gilt stets $\frac{C(n)}{n} > \alpha$; (4.3) und (4.4) sind also für $\gamma = 1$ erfüllt, so daß analog zur Voraussetzung über α in (I) jetzt $0 < \gamma < 1$ vorausgesetzt werden kann. Darüber hinaus kann jetzt noch die zusätzliche Voraussetzung gemacht werden, daß γ für einen endlichen Wert n von $\frac{C(n)}{n}$ angenommen wird. Ist dies nämlich nicht der Fall, dann gilt offenbar $\gamma = \gamma^*$ und $\frac{C(n)}{n} > \gamma \; (n = 1, 2, \ldots)$; die finiten Abschätzungen (4.3) und (4.4) folgen dann wegen $\alpha^* \geqq \alpha$ und $\lambda^* \leqq \lambda$ aus den asymptotischen Abschätzungen (4.5) und (4.6).

Die Ungleichungen (4.1) und (4.2) werden nun für eine Zahl n mit $\frac{C(n)}{n} = \gamma$ analog zur Schlußweise in (I, §§ 3, 4) abgeschätzt, wobei allerdings jetzt keine Minimumbetrachtungen notwendig sind, die, wie im Anschluß an den Reduktionssatz schon erwähnt, auch in (I) wegfallen können.

Entsprechend schließt man auch im asymptotischen Fall. So wird z.B. die auf (I.3.11) folgende Minimumbetrachtung jetzt durch die folgende Überlegung ersetzt. Nach Definition von γ^* gibt es eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen n mit $\frac{C(n)}{n} \to \gamma^*$, die dann zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für hinreichend großes n

$$\gamma' = \gamma^* - \varepsilon \leq \frac{C(n)}{n} \leq \gamma^* + \varepsilon = \gamma''$$

genügen. In der (I.3.11) entsprechenden Ungleichung

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda' \{\varrho + \gamma'(1-\varrho)\} \frac{C(n) - A(n)}{n} &\geq \gamma' \{1 - (1-\gamma')\,\varrho\} \frac{C(n)}{n} - \\ &- \frac{1+\gamma'}{2} \frac{C^2(n)}{n^2} + \frac{(1-\gamma'^2)\gamma'}{2} \varrho(2-\varrho) + K \frac{1}{n} \end{aligned} \right.$$

und bei dem folgenden Grenzübergang $n \to \infty$ seien nur solche Zahlen n berücksichtigt. Aus (4.7) folgt dann

$$\lambda' \{\varrho + \gamma'(1-\varrho)\} (\gamma'' - \alpha') \geq \{1 - (1-\gamma')\,\varrho\} \gamma'^2 - \frac{1+\gamma'}{2} \gamma''^2 + \\ + \frac{(1-\gamma'^2)\gamma'}{2} \varrho(2-\varrho) + K \frac{1}{n}.$$

Setzt man $\varrho = \frac{\sqrt{\gamma'}}{1+\sqrt{\gamma'}}$ ein, so erhält man

$$\gamma'' \geq \alpha' + \frac{1 + \sqrt{\gamma'} + \gamma'}{(1+\sqrt{\gamma'})^2} \frac{\gamma'(1-\gamma')}{\lambda'} - \frac{1+\gamma'}{2\lambda'\sqrt{\gamma'}} \gamma^* \varepsilon + K \frac{1}{n},$$

woraus (4.5) folgt.

2. Aus (4.3) und (4.5) können wieder Abschätzungen von γ bzw. γ^* durch Ausdrücke in α bzw. α^* hergeleitet werden. Es seien

$$c_1(x) = \frac{1+\sqrt{x}+x}{(1+\sqrt{x})^2}, \quad \sigma(x) = x\left(1 + c_1(x)\frac{1-x}{\lambda - c_1(x)}\right), \quad c_0(x) = c_1(\sigma(x))$$

$$\nu(x) = \frac{1}{2c_0(x)}\left[\sqrt{\{\lambda-(1-2x)c_0(x)\}^2 + 4x(1-x)c_0^2(x)} - \{\lambda-(1-2x)c_0(x)\}\right].$$

$$c_4(x) = c_4(x,\lambda) = c_0(x)\frac{\lambda}{\lambda - c_0(x)\{1-2x-\nu(x)\}}.$$

Wegen $\lim_{x\to 0}\sigma(x) = 0$ gilt $\lim_{x\to 0} c_0(x) = 1$; daraus folgt $\lim_{x\to 0}\nu(x) = 0$ sowie

$$\lim_{x\to 0} c_4(x) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \tag{4.8}$$

Mit diesen Funktionen gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\gamma > \alpha\left(1 + c_4(\alpha,\lambda)\frac{1-\alpha}{\lambda}\right), \tag{4.9}$$

$$\gamma^* > \alpha^*\left(1 + c_4(\alpha^*,\lambda^*)\frac{1-\alpha^*}{\lambda^*}\right). \tag{4.10}$$

Es ist klar, daß die Ungleichungen (4.9) und (4.10) richtig bleiben, wenn man $\nu(\alpha)$ bzw. $\nu(\alpha^*)$ durch größere Zahlen ersetzt. Zum Beispiel gelten die Ungleichungen

$$\nu(\alpha) \leqq c_1(\alpha)\frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda - c_1(\alpha)(1-2\alpha)}, \qquad \nu(\alpha) \leqq \sqrt{\alpha(1-\alpha)},$$

aus denen bereits (4.8) folgt.

Die Beweise von (4.9) und (4.10) sollen nicht im einzelnen ausgeführt werden. Wir beschränken uns auf folgenden Hinweis: Zum Beweis von (4.9) gehe man von (4.3) in der Form

$$\gamma\left(1 - c_1(\gamma)\frac{1-\gamma}{\lambda}\right) \geqq \alpha \tag{4.11}$$

aus, wobei die linke Seite eine monoton wachsende Funktion von γ ist; nimmt man an, daß (4.9) falsch sei, so kann man in (4.11) γ durch $\alpha\left(1 + c_4\frac{1-\alpha}{\lambda}\right)$ ersetzen, was durch einige Rechnung zum Widerspruch führt.

§ 5. Abschätzung der Anzahlfunktion einer Summenmenge von Gitterpunkten.

Es liegt die Frage nahe, ob man mit den Methoden der additiven Zahlentheorie auch additive Eigenschaften von Gitterpunktmengen in einem endlichdimensionalen Raum untersuchen kann. Im folgenden soll gezeigt werden, daß diese Frage für das in dieser Arbeit behandelte Problem zu bejahen ist. Wir wollen uns darauf beschränken, die ERDÖS-LANDAUsche Ungleichung $\gamma \geqq \alpha\left(1 + \frac{1-\alpha}{2\lambda}\right)$ in diesem Sinne zu verallgemeinern.

Unter einem Gitterpunkt des r-dimensionalen Raums verstehen wir einen Punkt mit ganzrationalen Koordinaten, den wir in der Form

$$\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r) \qquad (n_i \text{ ganz})$$

schreiben. Es sei $\mathfrak{V}$ die Menge der Gitterpunkte mit nichtnegativen Koordinaten und $\mathfrak{N}$ die Menge aller vom Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkte aus $\mathfrak{V}$. Die Gitterpunkte aus $\mathfrak{N}$ wollen wir als *natürliche Gitterpunkte* bezeichnen.

Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ Untermengen von $\mathfrak{V}$. Unter $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathfrak{V}$ verstehen wir die Menge aller $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathfrak{A}$ mit $a_i \leqq n_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Die *Anzahlfunktion* $A(\mathfrak{n})$ (mit $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$) der Menge $\mathfrak{A}$ sei die Anzahl der natürlichen Gitterpunkte aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$. In Analogie zur Definition im linearen Fall wird

$$\overline{\underset{\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}}{\text{fin}}} \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} = \alpha \tag{5.1}$$

als *(finite) Dichte* von $\mathfrak{A}$ bezeichnet[9]). Dann gilt für jeden natürlichen Gitterpunkt $\mathfrak{n}$: $A(\mathfrak{n}) \geqq \alpha N(\mathfrak{n})$.

Wir setzen im folgenden $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{N}$ und $0 < \alpha < 1$ voraus. Aus $0 < \alpha$ folgt, daß die Einheitspunkte, d.h. die Punkte

$$(1, 0, \ldots, 0), \ (0, 1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, \ (0, \ldots, 0, 1)$$

in $\mathfrak{A}$ enthalten sind, und aus $\alpha < 1$ folgt, daß $\mathfrak{A}$ nicht alle natürlichen Gitterpunkte enthält.

Sei $\overline{\mathfrak{A}}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{N}$ mit der Anzahlfunktion $\bar{A}(\mathfrak{n})$, dann hat man offenbar $\bar{A}(\mathfrak{n}) = N(\mathfrak{n}) - A(\mathfrak{n})$, und es gilt $\bar{A}(\mathfrak{n}) \leqq (1-\alpha) N(\mathfrak{n})$.

Unter der Summenmenge $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ mit der Dichte γ und der Anzahlfunktion $C(\mathfrak{n})$ ist die Menge aller in der Gestalt

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_r + b_r)$$

darstellbaren Gitterpunkte mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ zu verstehen. Wir setzen voraus, daß der Nullpunkt und die Einheitspunkte in $\mathfrak{B}$ enthalten sind; dann ist offenbar $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{C}$, und jeder natürliche Gitterpunkt $\mathfrak{m}$ läßt sich in der Form

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{b}_1 + \cdots + \mathfrak{b}_{l(\mathfrak{m})} \qquad (\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{B})$$

darstellen. Sei $l(\mathfrak{m})$ die kleinste natürliche Zahl, für die eine solche Darstellung möglich ist. Es werde

$$\overline{\underset{\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}}{\text{fin}}} \frac{1}{N(\mathfrak{n})} \sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{N}(\mathfrak{n})} l(\mathfrak{m}) = \lambda \tag{5.2}$$

als *mittlere Ordnung* von $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Ist λ endlich, dann wird $\mathfrak{B}$ eine *Basis endlicher Ordnung* der natürlichen Gitterpunkte genannt. Dies sei im folgenden für $\mathfrak{B}$ der Fall.

[9]) Diese Definition der Dichte wird im 2-dimensionalen Fall bereits von L. CHEO [1] benutzt.

Unter dieser Voraussetzung gilt

$$\gamma \geqq \alpha\left(1 + \frac{1}{2^r}\,\frac{1 - 2^{r-1}\alpha}{\lambda}\right); \tag{5.3}$$

dies ist für $r = 1$ die anfangs erwähnte Ungleichung von ERDÖS-LANDAU.

Wir können auf Grund dieser Ungleichung sagen, daß $\mathfrak{B}$ eine wesentliche Komponente für alle Mengen mit einer Dichte kleiner als 2^{-r+1} darstellt.

Zum Beweis wird analog zu den Überlegungen aus § 2 geschlossen, wobei wir sogleich die Voraussetzung $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{A}$ machen. Sei $\mathfrak{n}$ ein fester natürlicher Gitterpunkt und $\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})$. Dann sei

$D(\mathfrak{m})$ die Anzahl der verschiedenen Paare $(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})$, $\bar{\mathfrak{a}} \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{n})$ und $\bar{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a} = \mathfrak{m}$;

$E(\mathfrak{m})$ sei die Anzahl der verschiedenen Paare $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{a}', \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ und $\mathfrak{a}' - \mathfrak{a} = \mathfrak{m}$.

Damit gilt offenbar

$$D(\mathfrak{m}) + E(\mathfrak{m}) = A(\mathfrak{n} - \mathfrak{m}).$$

Sei nun $\mathfrak{t} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{m})$, dann besteht analog zum linearen Fall die Beziehung

$$D(\mathfrak{m}) \leqq D(\mathfrak{t}) + D(\mathfrak{m} - \mathfrak{t});$$

der Beweis erfolgt wie dort. Ebenfalls ist auch jetzt

$$D(\mathfrak{b}) \leqq C(\mathfrak{n}) - A(\mathfrak{n}) \qquad (\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{n})).$$

Wegen (5.2) erhält man folglich

$$\sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} D(\mathfrak{m}) \leqq \lambda N(\mathfrak{n})\{C(\mathfrak{n}) - A(\mathfrak{n})\}.$$

Andererseits gilt

$$\sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} E(\mathfrak{m}) \leqq \binom{A(\mathfrak{n})}{2}, \tag{5.4}$$

wobei es sich jetzt im allgemeinen nicht wie im linearen Fall um eine Gleichung handelt.

Aus den bisherigen Angaben erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda N(\mathfrak{n})\{C(\mathfrak{n}) - A(\mathfrak{n})\} \geqq \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} A(\mathfrak{n} - \mathfrak{m}) - \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} E(\mathfrak{m}) \geqq \\ &\geqq \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} A(\mathfrak{n} - \mathfrak{m}) - \binom{A(\mathfrak{n})}{2} \geqq \alpha \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} N(\mathfrak{n} - \mathfrak{m}) - \binom{A(\mathfrak{n})}{2} \end{aligned}\right. \tag{5.5}$$

also

$$\lambda \frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \geqq \lambda \frac{A(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} - \frac{A^2(\mathfrak{n})}{2N^2(\mathfrak{n})} + \frac{\alpha}{N^2(\mathfrak{n})}\left(\frac{N(\mathfrak{n})}{2} + \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{n})} N(\mathfrak{n} - \mathfrak{m})\right). \tag{5.6}$$

Da die Funktion $\xi\left(\lambda-\frac{\xi}{2}\right)$ mit $\alpha\leqq\xi\leqq 1$ und $\lambda\geqq 1$ ihren minimalen Wert für $\xi=\alpha$ annimmt, folgt aus dieser Ungleichung

$$\lambda\frac{C(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}\geqq\lambda\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha}{N^2(\mathfrak{n})}\left(\frac{N(\mathfrak{n})}{2}+\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{N}(\mathfrak{n})}N(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})\right). \tag{5.7}$$

Um (5.3) zu erhalten, haben wir jetzt $N(\mathfrak{n})$ und $\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{N}(\mathfrak{n})}N(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})$ zu berechnen. Offenbar ist

$$N(\mathfrak{n})=\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)-1,$$

also gilt

$$\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{N}(\mathfrak{n})}N(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})=\sum_{\substack{\mathfrak{m}\in\mathfrak{N}(\mathfrak{n})\\ \mathfrak{m}\neq\mathfrak{n}}}N(\mathfrak{m})=\sum_{m_1=0,\ldots,n_1}\cdots\sum_{m_r=0,\ldots,n_r}\left\{\prod_{i=1}^{r}(m_i+1)-1\right\}-N(\mathfrak{n})=$$

$$=\prod_{i=1}^{r}\frac{(n_i+1)(n_i+2)}{2}-2\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)+1.$$

Daraus folgt

$$\frac{N(\mathfrak{n})}{2}+\sum_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{N}(\mathfrak{n})}N(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})=\frac{1}{2^r}\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)(n_i+2)-\frac{3}{2}\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)+\frac{1}{2}.$$

Zum Beweis von (5.3) ist jetzt wegen (5.7) nur noch nachzuweisen, daß dieser Ausdruck größer oder gleich $\frac{1}{2^r}N^2(\mathfrak{n})$ ist, und das ist offenbar der Fall, wenn die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{2^r}\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)(n_i+2)\geqq\frac{1}{2^r}\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{2^r}\right)\prod_{i=1}^{r}(n_i+1). \tag{5.8}$$

Dabei kann $n_i>0$ $(i=1,\ldots,r)$ vorausgesetzt werden, da für $n_i=0$ die i-te Komponente keinen Beitrag liefert. Für $r=1$ ist (5.8) offenbar erfüllt:

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1).$$

Der Beweis erfolgt nun durch Induktion nach r mit dem Induktionsbeginn $r=2$. Für $r=2$ hat man wegen $n_1\geqq 1$, $n_2\geqq 1$:

$$\frac{1}{4}(n_1+1)(n_1+2)(n_2+1)(n_2+2)>$$

$$>\frac{1}{4}(n_1+1)^2(n_2+1)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{4}\right)(n_1+1)(n_2+1).$$

Die Behauptung sei nun für r richtig, dann folgt

$$\frac{1}{2^{r+1}}\prod_{i=1}^{r+1}(n_i+1)(n_i+2)=\frac{1}{2^r}\left(\prod_{i=1}^{r}(n_i+1)(n_i+2)\right)\frac{(n_{r+1}+1)(n_{r+1}+2)}{2}\geqq$$

$$\geqq\frac{1}{2^{r+1}}\prod_{i=1}^{r+1}(n_i+1)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{2^r}\right)\frac{n_{r+1}+2}{2}\prod_{i=1}^{r+1}(n_i+1).$$

Wegen

$$\left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix} - \frac{2}{2^r}\right)^{n_{r+1}-2} \geqq \left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix} - \frac{2}{2^r}\right)^{3} \geqq \begin{matrix}3\\2\end{matrix} - \frac{2}{2^{r+1}} \qquad (r = 2, 3, \ldots)$$

ist (5.8) auch für $r+1$ erfüllt. Damit ist (5.3) vollständig bewiesen.

Literatur.

[1] Cheo, L.: On the density of sets of Gaussian integers. Amer. Math. Monthly **58**, 619—624 (1951). — [2] Kasch, F.: Abschätzung der Dichte von Summenmengen. Math. Z. **62**, 368—387 (1955). — [3] Kneser, M.: Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen. Math. Z. **58**, 459—484 (1953). — [4] Landau, E.: Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. Cambridge Tracts No. 35. Cambridge 1937. — [5] Raikov, D.: On the addition of point-sets in the sense of Schnirelmann (Russisch mit englischem Auszug). Mat. Sbornik **5** (=47), 425—440 (1939). — [6] Selberg, S.: A survey of some recent results in additive number theory. Mat. Tidsskr. A **1949**, 1—15.

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 13. Juni 1955)

WILANSKY, A., u. K. ZELLER
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 258—269 (1956)

Abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen; starke Limitierbarkeit

Von
ALBERT WILANSKY und KARL ZELLER

1. Einleitung

Wir betrachten Limitierungsverfahren der Form

$$A\text{-}\lim x_k = \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \mathfrak{y} = A\,\mathfrak{x} \equiv y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n\,k}\,x_k \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

(Gelegentlich verweisen wir auch auf Verfahren mit stetigen Parametern.) Früher untersuchte man hauptsächlich spezielle Matrixverfahren. Jetzt bemüht man sich, die wesentlichen Eigenschaften dieser Matrizen allgemein zu formulieren. Eine solche Eigenschaft ist

$$\text{(AB)} \qquad \sup_{m,\,n} \left| \sum_{k=0}^{m} a_{n\,k}\,x_k \right| < \infty \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}),$$

wo $\mathfrak{A}$ das Wirkfeld des Verfahrens ist und (AB) auf Abschnittsbeschränktheit hindeutet.

(AB) ist bei den C_p-Verfahren mit $0 < p \leqq 1$ und bei gewissen NÖRLUND- und RIESZ-Mitteln erfüllt, aber lange nicht bei allen Verfahren. (AB) (und nahe verwandte Eigenschaften, worauf wir aber im folgenden nicht genauer eingehen) wurden von zahlreichen Autoren zu Umkehr-, Vergleichs- und Konvergenzfaktorensätzen ausgenützt, wir erwähnen CESÀRO, HARDY, JACOB, BOSANQUET, LORENTZ. Gewisse Approximations- und Verträglichkeitssätze von MAZUR, BANACH, DAREVSKY hängen auch mehr oder minder mit (AB) zusammen.

Die Verfasser haben in mehreren Arbeiten seit 1950 (AB) und die damit zusammenhängenden Eigenschaften und Ergebnisse in funktionalanalytischer Weise gedeutet. Kurz gesagt, handelt es sich um die Einführung einer geeigneten Basis in das als F- oder B-Raum aufgefaßte Wirkfeld, was unmittelbar Anwendungen auf die obengenannten und andere Probleme gestattet. Im Anschluß an Publikationen, Vorträge und persönliche Mitteilungen der Verfasser haben weitere Autoren die Theorie und vor allem die Anwendungen auf spezielle Verfahren ausgebaut: JURKAT, KNOPP, MACPHAIL, PEYERIMHOFF. Es sei betont, daß ein Großteil der allgemeinen Ergebnisse schon in den älteren speziellen Untersuchungen steckt.

Die Bedeutung der funktionalanalytischen Methoden besteht hier darin, daß sie die Bedingung (AB) in einen größeren Rahmen stellen, allgemeine Resultate mit einfachem Beweis ergeben und Übertragungen auf andere

Arten von Limitierbarkeit (absolut, stark) gestatten. Ferner kann man durch sie häufig den genauen Geltungsbereich von Sätzen abgrenzen und z.B. feststellen, daß ein gewisses Resultat genau dann gilt, wenn (AB) erfüllt ist. Auch erkennt man, daß die Ergebnisse weniger von der Matrix als vielmehr vom Wirkfeld abhängen.

Wir wollen hier einen kurzen Überblick über die Theorie geben. Dabei vereinfachen wir viele Beweise und geben zum Teil neue Resultate. Zum Schluß behandeln wir die mit (AB) zusammenhängende Frage der Konvergenzfaktoren bei der starken Limitierbarkeit.

2. Funktionalanalytische Grundlagen

Wir betrachten stetige lineare Operationen T_n, die einen B-Raum $\mathfrak{B}$ in einen ebensolchen $\mathfrak{C}$ abbilden. Bekanntlich gelten folgende Sätze.

Beschränktheitsprinzip. *Ist* $\sup_n \|T_n(\mathfrak{x})\| < \infty$ *für jedes* $\mathfrak{x}$, *so gilt* $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

Konvergenzprinzip. *Existiert* $\lim_n T_n(\mathfrak{x}) = T(\mathfrak{x})$ *für jedes* $\mathfrak{x}$, *so ist* T *linear und stetig.*

Grundmengenprinzip. *Ist* $\sup_n \|T_n\| < \infty$ *und existiert* $\lim_n T_n(\mathfrak{x})$ *für jedes* $\mathfrak{x}$ *einer Grundmenge, so sogar für jedes* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}$. *(Eine Grundmenge ist eine solche, deren lineare abgeschlossene Hülle der ganze Raum ist.)*

Fortsetzungsprinzip. *Eine Linearform* f, *die in einer linearen Teilmenge* $\mathfrak{D}$ *eines B-Raumes* $\mathfrak{B}$ *erklärt ist und dort*

$$|f(\mathfrak{x})| \leq M \cdot \|\mathfrak{x}\|$$

genügt, kann linear auf ganz $\mathfrak{B}$ *fortgesetzt werden, so daß die Ungleichung erhalten bleibt.*

Ist die Matrix A normal (d.h. gilt $a_{nn} \neq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $a_{nk} = 0$ $(k > n)$), so ist das Wirkfeld $\mathfrak{A}$ ein B-Raum mit der Norm $\sup_n |y_n|$. Dabei sind die Abbildungen $\mathfrak{x} \to x_k$ linear und stetig („BK-Raum"). Jede stetige Linearform f in $\mathfrak{A}$ ist von der Gestalt $f(\mathfrak{x}) = g \cdot \lim y_n + \sum g_n y_n$ mit $\sum |g_n| < \infty$. Auch das Nullwirkfeld $\mathfrak{A}_0$ (die Menge der zu Null limitierten Folgen) ist ein BK-Raum mit der genannten Norm. Die stetigen Linearformen in $\mathfrak{A}_0$ gestatten die obige Darstellung mit $g = 0$.

3. Die Bedingung (AB)

Wir setzen bis auf weiteres A als normal voraus, so daß $\mathfrak{A}$ ein BK-Raum ist. Das Beschränktheitsprinzip zeigt, daß (AB) gleichbedeutend ist mit der Existenz eines $M < \infty$, für das

$$\text{(AB*)} \qquad \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k \right| \leq M \cdot \sup_r |y_r| \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{A},\ m, n = 0, 1, \ldots)$$

gilt. Hier und im folgenden interessiert natürlich nur der Fall $m < n$. Da man bei einer normalen Matrix durch Abänderung der x_k mit $k > m$ alle y_r

mit $r > m$ zu Null machen kann, ist (AB*) gleichbedeutend mit

$$\text{(AB**)} \qquad \left|\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k\right| \leq M \cdot \operatorname*{Max}_{0 \leq r \leq m} |y_r| \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{A};\ m, n = 0, 1, \ldots),$$

wo wieder M fest ist und man $\mathfrak{x}$ sogar alle beliebigen Folgen durchlaufen lassen darf (vgl. [20], [34]). Die Form (AB**) bezeichnet man gewöhnlich als Mittelwertsatz vom RIESZ-Typ.

Wir geben zwei Kriterium zum Nachweis von (AB) an, die von M. RIESZ [32], [33] und BOSANQUET [4] stammen und z.B. auf die Verfahren C_p $(0 < p \leq 1)$ angewendet werden können. Siehe auch [3], [13, S. 68], [14, S. 28], [16], [17], [18], [20], [35], [37].

Kriterium 1 (M. RIESZ). *Erfüllt die Inverse B der nichtnegativen normalen Matrix A die Beziehungen $b_{nk} \leq 0$ für $k < n$, $\sum_{k=0}^{n} b_{nk} \geq 0$ für alle n, so genügt A der Ungleichung* (AB**) *mit $M = 1$.*

Beweis. Es genügt, (AB**) für $m < n$ zu beweisen. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \sum_{r=0}^{k} b_{kr} y_r = \sum_{r=0}^{m} y_r \sum_{k=r}^{m} a_{nk} b_{kr}$$

und weiter wegen $AB = I$

$$= \sum_{r=0}^{m} y_r \left(-\sum_{k=m+1}^{n} a_{nk} b_{kr}\right) = \sum_{r=0}^{m} y_r c_r,$$

wobei $c_r = c_r(m, n)$ als Abkürzung für den Klammerausdruck steht. Wegen der Voraussetzung über b_{nk} ist $c_r \geq 0$, Einsetzen von $y_r = 1$ zeigt

$$\sum_{r=0}^{m} c_r = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \sum_{r=0}^{k} b_{kr} y_r \leq \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \sum_{r=0}^{k} b_{kr} = 1,$$

wobei wir die Voraussetzung über $\sum b_{nk}$ gebrauchen. Insgesamt ist

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k\right| \leq \operatorname*{Max}_{0 \leq r \leq m} |y_r| \sum_{k=0}^{m} |c_k| \leq \operatorname*{Max}_{0 \leq r \leq m} |y_r| \cdot 1,$$

w. z. z. w.

Die Eigenschaften der Inversen B sind nicht leicht festzustellen (gewisse Resultate erhält man ähnlich wie in [15], vgl. auch Aussagen über endliche Matrizen, etwa [27]), daher ist das nächste Kriterium oft leichter anzuwenden.

Kriterium 2 (BOSANQUET). *Besteht zwischen den Zeilen einer normalen Matrix A eine Beziehung*

$$a_{n+1,k} = d_{nk} a_{nk} \quad \textit{mit} \quad 1 \geq d_{n0} \geq d_{n1} \geq \cdots \geq d_{nn} \geq 0 \qquad (0 \leq k \leq n,\ n = 0, 1, \ldots),$$

so ist (AB**) *mit $M = 1$ erfüllt.*

Beweis. Wir nehmen $m < n + 1$ an. Die ABELsche Ungleichung liefert zusammen mit der Voraussetzung

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{n+1,k} x_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{m} d_{nk} a_{nk} x_k\right| \leq \operatorname*{Max}_{0 \leq r \leq m} \left|\sum_{k=0}^{r} a_{nk} x_k\right|.$$

Induktion nach n (der Fall $n=0$ ist klar) ergibt die Abschätzung, da bei $m \geq n+1$ nichts zu beweisen ist.

Bemerkungen. 1. Erfüllt eine nichtnegative Matrix A die Voraussetzungen von Kriterium 2, so ändert sich daran nichts, wenn wir die Hauptdiagonalelemente vergrößern.

2. Genügt eine nichtnegative Matrix A den Voraussetzungen von Kriterium 2, so auch denen von Kriterium 1. (Man weist die geforderten Eigenschaften von B durch Induktion nach dem Zeilenindex nach.) Die Voraussetzungen von Kriterium 1 sind nahe verwandt (jedoch nicht ganz äquivalent) mit (AB); manche Arbeiten gehen von diesen Voraussetzungen statt von (AB) aus.

Es folgt nun eine notwendige Bedingung für (AB), mit der man z.B. zeigen kann, daß die C_p mit $p>1$ (AB) nicht erfüllen. [Weitere notwendige Bedingungen sind aus dem folgenden zu entnehmen. Roh kann man sagen, daß nur verhältnismäßig schwache Verfahren (AB) genügen.]

Kriterium 3. *Wird* (AB) *von der normalen Matrix A erfüllt, so gibt es ein $M<\infty$ mit $|a_{nk}| \leq M \cdot |a_{nn}|$ für $k, n = 0, 1, \ldots$.*

Zum Beweis verwendet man (AB**) statt (AB) und setzt spezielle Folgen x_k ein, die aus einer Eins und sonst aus Nullen bestehen.

4. Die funktionalanalytische Deutung

Die früheren Anwendungen von (AB) beruhen auf der Summationsvertauschung

$$\sum_n g_n \sum_k a_{nk} x_k = \sum_k x_k \sum_n g_n a_{nk},$$

die bei $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ und $\sum |g_n| < \infty$ gestattet ist. Dieser Weg führt auch zu allgemeinen Resultaten. Eleganter ist jedoch ein Vorgehen, bei dem man (AB) zur Bildung einer geeigneten Basis in $\mathfrak{A}$ ausnützt ([39], [40], [43], [45]).

A heißt eine Sp-Matrix, wenn alle Spaltenlimites $\lim_n a_{nk} = a_k$ vorhanden sind. Wir setzen

$$\mathfrak{e} = \{1, 1, 1, \ldots\}, \quad \mathfrak{e}_0 = \{1, 0, 0, \ldots\}, \quad \mathfrak{e}_1 = \{0, 1, 0, 0, \ldots\}, \ldots.$$

Eine Sp-Matrix enthält alle $\mathfrak{e}_i$ in ihrem Wirkfeld, was für die funktionalanalytische Deutung gebraucht wird (in den bisherigen Arbeiten wurde A sogar als Sp_0-Matrix, d.h. $a_k = 0$, vorausgesetzt).

Satz 1 (Basis). *Erfüllt eine normale Sp-Matrix A die Bedingung* (AB), *so bilden die $\mathfrak{e}_i$ entweder allein oder zusammen mit einer weiteren Folge $\mathfrak{d}$ eine Basis im BK-Raum $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}^*$ die lineare abgeschlossene Hülle der $\mathfrak{e}_i$. Dann ist $\mathfrak{A}^*$ ein Unterraum des B-Raumes $\mathfrak{A}$, und die $\mathfrak{e}_i$ bilden im B-Raum $\mathfrak{A}^*$ eine Grundmenge. Die durch $\mathfrak{x} \to x_0 \mathfrak{e}_0 + \cdots + x_n \mathfrak{e}_n$ definierten Operationen T_n sind in $\mathfrak{A}^*$ linear und stetig, da $\mathfrak{A}^*$ ein BK-Raum ist. Wegen (AB) gilt $\sup_n \|T_n\| < \infty$, das Grundmengenprinzip zeigt $T_n \mathfrak{x} \to \mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{x}$, d.h. die $\mathfrak{e}_i$ bilden eine Basis in $\mathfrak{A}^*$. Wir haben noch zu zeigen, daß entweder $\mathfrak{A}^*$, oder die lineare

Hülle von $\mathfrak{A}^*$ und einem gewissen $\mathfrak{d}$, gleich $\mathfrak{A}$ ist. (Im Falle $a_k = 0$ ist das trivial.) Jede stetige Linearform f in $\mathfrak{A}$ ist von der Gestalt $f(\mathfrak{x}) = g \cdot \lim y_n + \sum g_n y_n$ mit $\sum |g_n| < \infty$, und Summationsvertauschung mittels (AB) ergibt sogar die (nicht immer einzige) Darstellung

$$f(\mathfrak{x}) = g \cdot \lim y_n + \sum_k f_k x_k.$$

Für stetige Linearformen f, die in $\mathfrak{A}^*$ verschwinden, gilt $g \cdot a_k + f_k = 0$, d.h. alle solchen Linearformen hängen von einer einzigen linear ab. Dies zeigt (Fortsetzungsprinzip), daß $\mathfrak{A}$ die lineare Hülle von $\mathfrak{A}^*$ und höchstens einem weiteren Element ist.

Bemerkungen. 1. Daß beide Fälle, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}^*$, möglich sind, zeigen die Beispiele A = Einheitsmatrix und $A = \{a_{nk}\}$ mit $a_{nk} = 1$ $(k \leqq n)$, $a_{nk} = 0$ sonst („Summationsmatrix S“).

2. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 konvergiert $\sum a_k x_k$ für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ (maximal inset [40]). Denn im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ ergibt sich das wieder aus dem Grundmengenprinzip. Ist aber $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}^*$, so gibt es eine stetige Linearform $f \neq 0$, die in $\mathfrak{A}^*$ verschwindet, für die also mit den oben gebrauchten Bezeichnungen $g \cdot a_k + f_k = 0$ und $g \neq 0$ gilt. Da die f_k „Konvergenzfaktoren“ sind, sind es auch die a_k. Diese Betrachtung zeigt auch: Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ und jede stetige Linearform f in $\mathfrak{A}$ konvergiert $\sum x_k f(\mathfrak{e}_k)$ (funktionale Abschnittskonvergenz, FAK [45]). Wichtig ist, daß (AB) im ganzen Wirkfeld gilt. Man kann leicht ein A angeben, so daß eine gewisse Folge $\mathfrak{x}$ des Wirkfeldes (AB) erfüllt, daß aber $\sum a_k x_k$ divergiert.

3. Statt „A hat (AB)“, sagt man auch „A ist eine ‚controlled matrix‘“. Statt „die $\mathfrak{e}_k$ bilden eine Basis in $\mathfrak{A}^*$“ sagen wir auch „$\mathfrak{A}^*$ besitzt Abschnittskonvergenz“ (AK [45]). Ist A permanent oder „koregulär“ (s. [38]), so können wir (unter der Voraussetzung von Satz 1) $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ wählen. Bilden in einem Wirkfeld $\mathfrak{A}$ die $\mathfrak{e}_k$ eine Basis, so gilt (AB). Bilden hingegen die $\mathfrak{e}_k$ nur zusammen mit einem $\mathfrak{d}$ eine Basis, so muß (AB) nicht unbedingt gelten. Beispiel: $a_{nk} = -1$ $(k < n)$, $a_{nk} = 1$ $(k = n)$, $a_{nk} = 0$ $(k > n)$. Das Beispiel kann auch so abgeändert werden, daß $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$ ist. Bilden bei konvergenztreuen A die $\mathfrak{e}_k$ und $\mathfrak{c}$ eine Basis in $\mathfrak{A}$, so gilt (AB). Wir vermuten: Bilden die $\mathfrak{e}_k$ mit einem $\mathfrak{d}$ zusammen eine Basis und hat A „maximal inset“, so gilt (AB).

4. Haben die normalen Matrizen A und B dasselbe Wirkfeld, so erfüllen beide gleichzeitig (AB) oder nicht. Zum Beweis setzt man etwa $A = (AB^{-1})B$ und bemerkt, daß AB^{-1} konvergenztreu ist. Vgl. auch die allgemeineren Methoden in [44], [45]. Man kann also sagen, daß (AB) nicht von der Matrix, sondern vom Wirkfeld abhängt (Invarianz).

5. Die Normen von $f_{mn}(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k$ lassen sich oft genauer bestimmen, z.B. gilt $\|f_{mn}\| = \sum_{k=0}^{m} a_{nk}$ unter den Voraussetzungen von Kriterium 1 bei $a_{nk} \geqq 0$ und $\sum_k a_{nk} = 1$. Das wurde in [35] bemerkt und in [21] für Vergleichssätze ausgenützt.

6. Jedes $\mathfrak{x}$ [A erfülle (AB)] kann durch die Abschnitte der Entwicklung nach $\mathfrak{d}, \mathfrak{c}_i$ approximiert werden. Das führt zu Verträglichkeitssätzen, vgl. [2], [9], [26], [42], [44], [45].

Satz 1 enthält den Kern aller weiteren Überlegungen. Manche der Ergebnisse folgen fast unmittelbar aus Satz 1, in anderen Fällen sind zusätzliche Beweisschritte nötig, die aber häufig aus älteren Arbeiten über spezielle Verfahren zu entnehmen sind. Die Ergebnisse über Umkehrsätze, Konvergenzfaktoren, Vergleich sind daher nicht eigentlich neu. Daß die funktionalanalytische Methode trotzdem wesentliche Vorteile bietet, haben wir schon oben ausgeführt.

Die in Satz 1 auftretende Alternative stört bei allgemeinen Formulierungen. Um das zu umgehen, betrachten wir von jetzt an Sp-Matrizen mit $a_k = 0$ (sog. Sp_0-Matrizen). Dann ist $\mathfrak{A}^*$ die Menge $\mathfrak{A}_0$ der zu Null limitierten Folgen (das Nullwirkfeld) und daher $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$. Außerdem betrachten wir $\mathfrak{A}_0$ statt $\mathfrak{A}$, weil dadurch die prägnantesten Formulierungen zustande kommen. Bei Übertragungen auf $\mathfrak{A}$ muß dann nur noch die Folge $\mathfrak{d}$ berücksichtigt werden, was wir dem Leser überlassen, ebenso die Formulierung der Resultate im allgemeinen Fall. Die Voraussetzung „A normal" behalten wir nach wie vor bei.

5. Umkehrsätze

Wir verwenden eine bei speziellen Verfahren bekannte Methode, die im Zusammenhang mit (AB) zum erstenmal in [45] formuliert wurde.

Satz 2 (Umkehrprinzip). *Erfüllt die normale Sp_0-Matrix die Bedingung* (AB), *so gilt für jedes* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$

$$\sup_n \left| \sum_{k=r}^{s} a_{nk} x_k \right| \to 0 \quad \text{für} \quad r, s \to \infty .$$

Beweis. Der in Rede stehende Ausdruck ist gleich $\left\| \sum_{k=r}^{s} x_k \mathfrak{c}_k \right\|$. Da die $\mathfrak{c}_k$ eine Basis bilden, folgt die Behauptung.

Anwendungen. 1. Größenordnungsbedingung. Setzt man $r = s$, so erhält man $x_k = o\left(1/\sup_n |a_{nk}|\right)$, was wegen Kriterium 3 dasselbe wie $x_k = o\left(1/a_{kk}\right)$ (für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$) bedeutet. Das ist natürlich eine „beste" Größenordnungsabschätzung (betrachte die Inverse). Bei speziellen Verfahren wurde diese Methode verwendet von [14, S. 36], [13, S. 95], [11] usw., in Zusammenhang mit (AB) in [45], [47] und, unter Zusatzbedingungen, in [20].

2. Mercersätze. Ist $1/a_{kk}$ beschränkt, so gilt $x_k \to 0$ für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$. So wurde schon in [14, S. 46] vorgegangen, vgl. auch die oben genannte Literatur. Ferner kann man so zeigen, daß das bekannte Verfahren

$$A = (1 - \alpha) C_1 + \alpha I \qquad (\alpha > 0)$$

konvergenzgleich ist [Nachweis von (AB) mittels Bemerkung 1 zu Kriterium 2]. Umgekehrt erfüllt ein normales konvergenzgleiches Verfahren A

die Bedingung (AB) und $1/a_{kk} = O(1)$; das ist selbstverständlich auf Grund der Aussage, daß (AB) nur vom Wirkfeld abhängt (§ 4.4).

Schließlich ergibt sich ein kurzer Beweis für den Satz: Eine permanente Matrix, die nur beschränkte Folgen limitiert, ist konvergenzgleich [denn aus der Voraussetzung folgt (AB) und $1/a_{kk} = O(1)$].

3. Umkehrsätze. Eine bekannte Methode zum Beweis des $O - C_1$-Umkehrsatzes (s. etwa [10], [50]) läßt sich zur Aufstellung von Tauberbedingungen bei allgemeinen (AB)-Matrizen benützen ([47]).

6. Faktorfolgen und Vergleichssätze

Mit Hilfe von (AB) lassen sich teilweise tiefliegende Vergleichssätze für CESÀRO-, NÖRLUND-, stetige und unstetige RIESZ-Mittel usw. gewinnen. Das ist schon früh erkannt worden: [6, S. 427], [7], [11], [12], [13, Th. 14, Th. 23], [16], [24], [32], [33]. In diesen Arbeiten ist der Kern der allgemeinen Ergebnisse enthalten, die unmittelbar aus Satz 3 folgen ([46], [47]). Neuere Anwendungen findet man bei [21]. Faktorfolgen wurden schon in [1] betrachtet.

Satz 3 (Faktorfolgen). *Wird* (AB) *von der Matrix A erfüllt, so gilt*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k d_k\right| \leq M \cdot \|x\| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |d_k - d_{k-1}| \qquad (d_{-1} = 0,\ n = 0, 1, \ldots)$$

mit einem nur von A abhängigen M.

Partielle Summation und (AB*) liefern den Beweis. Setzen wir neben (AB) noch Sp_0 voraus, so liefert das Grundmengenprinzip unmittelbar zwei Ergebnisse. Faktorfolgen: Ist $x \in \mathfrak{A}_0$ und $\sum d_k - d_{k-1} < \infty$, so gilt $\{x_k d_k\} \in \mathfrak{A}_0$. Vergleich: Ist die Sp_0-Matrix B so beschaffen, daß

$$b_{nk} = d_{nk} \cdot a_{m_n k} \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk} - d_{n,k-1}| \leq M \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

ist, so gilt $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{B}_0$. — Die Freiheit in der Wahl von m_n erleichtert den Beweis mancher Vergleichssätze. Beim Vergleich zweier Verfahren A und C verwendet man oft eine Zerlegung $C = B + (C - B)$ und behandelt B nach der eben geschilderten Methode sowie $(C - B)$ mittels direkter Abschätzung; vgl. die oben genannte Literatur.

7. Stetige Linearformen und Konvergenzfaktoren

Wir nennen Zahlen f_k Konvergenzfaktoren für eine Folgenmenge $\mathfrak{X}$, wenn $\sum f_k x_k$ für jedes $x \in \mathfrak{X}$ konvergiert. Anwendungen von (AB) auf Konvergenzfaktorenprobleme bei speziellen Verfahren wurden von [4], [5], [24] gegeben. Diese Resultate lassen sich leicht verallgemeinern. Funktionalanalytisch gesehen beruhen die Ergebnisse auf Satz 4 ([40], [43], [45]), aus dem sich alles weitere ableiten läßt. Herr PEYERIMHOFF, der von einem der Verfasser von dieser Möglichkeit unterrichtet wurde, hat die Anwendungen ausgebaut [28], [29].

Satz 4 (Konvergenzfaktoren). *Hat die normale Sp_0-Matrix A die Eigenschaft* (AB), *so besteht vermittels*

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n y_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x_k \qquad (\mathfrak{y} = A\mathfrak{x},\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0)$$

eine 1-1-1-*Beziehung zwischen den stetigen Linearformen f in $\mathfrak{A}_0$, den absolut konvergenten Reihen $\sum g_n$ und den Konvergenzfaktoren f_k für $\mathfrak{A}_0$.*

Beweis. Die Beziehung zwischen f und $\sum g_n$ ist bekannt. Sind die f_k Konvergenzfaktoren, so definiert $\sum f_k x_k$ nach dem Konvergenzprinzip eine stetige Linearform. Ist f eine stetige Linearform, so konvergiert wegen Satz 1 die Reihe $\sum f(\mathfrak{e}_k) x_k - \sum f_k x_k$, woraus sich die Behauptung ergibt.

Bemerkungen. 1. Man kann daher sagen, daß Zahlen f_k genau dann Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{A}_0$ sind, wenn es eine stetige Linearform f in $\mathfrak{A}_0$ mit $f(\mathfrak{e}_k) = f_k$ gibt oder wenn es Zahlen g_n mit $\sum |g_n| < \infty$ und $\mathfrak{g}A = \mathfrak{f}$ gibt. Gilt umgekehrt $\sum g_n < \infty$ für $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}A^{-1}$ (Auflösung der Gleichung), so sind für geeignetes $\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{h}A^{-1} = 0$ die Zahlen $f_k = h_k$ Konvergenzfaktoren ($\mathfrak{f} = \mathfrak{h} - \mathfrak{g}A$). Durch geeignete Zusatzforderungen an $\mathfrak{f}$ (Größenordnung u. ä.) neben der genannten Bedingung über $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}A^{-1}$ erzwingt man $\mathfrak{h} = 0$, so daß die f_k selber Konvergenzfaktoren sind. In dieser Gestalt erscheinen die Konvergenzfaktorensätze bei speziellen Verfahren meist. Anders aufgefaßt, beruht das Problem darauf, in

$$\mathfrak{f}\mathfrak{x} = \mathfrak{f}(A^{-1}A)\mathfrak{x} = (\mathfrak{f}A^{-1})(A\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}\mathfrak{y}$$

die Summationsvertauschung zu rechtfertigen.

2. Bemerkenswert ist noch, daß man bei $\mathfrak{A}_0$ nicht mehr Konvergenzfaktoren erhält, wenn man von $\sum f_k x_k$ nur Summierbarkeit nach einem bestimmten Matrixverfahren fordert, und daß der Konvergenzfaktorensatz in der vorliegenden Form im wesentlichen an (AB) (genauer: an FAK) gebunden ist, s. [*45*].

3. Sind die f_k Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{A}_0$, wo A eine permanente (AB)-Matrix ist, so ist die Reihe $\sum F_k(x_k - x_{k-1})$ (mit $F_i = \sum_{l=i}^{\infty} f_l$) A-summierbar für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}_0$, da die bei partieller Summation auftretende „Restfolge" $F_n x_n$ nach § 6 (Faktorfolgen) A-limitierbar ist. Dies führt zur Bestimmung von Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren für A-summierbare Reihen, s. [5] und [*20*], [*22*].

4. Für eine Sp-Matrix A ist (AB) mit der Eigenschaft PMI äquivalent, die nach Definition besagt, daß für jedes mit A gleichstarke Matrixverfahren B die Reihe $\sum_k x_k \lim_n b_{nk}$ ($\mathfrak{x} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$) konvergiert. Der Beweis beruht auf der Darstellung stetiger Linearformen in $\mathfrak{A}$ durch gleichstarke Limitierungsverfahren, vgl. [*40*].

5. Die betrachteten Reihen $\sum f_k x_k$ usw. konvergieren im allgemeinen nicht absolut. Auf der Darstellung der stetigen Linearformen in $\mathfrak{A}^*$ beruhen gewisse Inäquivalenzsätze, s. [*45*], [*49*].

8. Sonstiges

1. Nicht ganz befriedigend ist, daß unsere Theorie die Verfahren C_p mit $p > 1$ nicht erfaßt. Man kann sich jedoch behelfen, indem man durch mehrfache partielle Summation von p auf einen Index zwischen 0 und 1 zurückschließt $\left(C_p = \operatorname{diag}\left\{\binom{n+p}{n}^{-1}\right\} S^{p-[p]} S^{[p]}\right)$, wie das seit jeher bei den C-Verfahren gemacht wurde. Allgemeiner kann man Matrizen behandeln, die Produkte von (AB)-Matrizen sind, muß jedoch große Einschränkungen in Kauf nehmen. Am günstigsten ist die Situation noch bei Umkehrsätzen. Eine befriedigende allgemeine Theorie ist noch nicht vorhanden, für spezielle Resultate vgl. man [5], [8], [14], [19].

Ein anderer Weg beruht darauf, daß in den Nullwirkfeldern vieler Verfahren, z.B. C_p, die e_i eine „TOEPLITZ-Basis" bilden (d.h. $\sum x_i e_i$ konvergiert für jedes $x \in \mathfrak{A}_0$ gegen x im Sinne eines bestimmten TOEPLITZ-Verfahrens). Diese Theorie ist noch in Entwicklung, erscheint aber erfolgversprechend (vgl. [48]).

Schließlich kann man in einem Wirkfeld diejenige Untermenge betrachten, in der die Entwicklung nach den e_i möglich ist, vgl. [45], [47], [49].

2. Manche unserer Ergebnisse sind nicht daran gebunden, daß $\mathfrak{A}$ ein Wirkfeld ist, sondern lassen sich auf beliebige Folgenräume verallgemeinern, s. [45]. Insbesondere sind Übertragungen auf andere Arten von Limitierbarkeit (absolut, stark) möglich. Bei absoluter Summierbarkeit wurde dies in [29], [30] durchgeführt. Am besten geht man von der Matrix A aus, die die Folge-Reihe-Form der Transformation gibt. Gilt $a_{nk} = 0$ $(k > n)$, $a_{nk} > 0$ $(k = n)$, $a_{nk} < 0$ $(k < n)$ so hat die Inverse B nichtnegative Glieder ([15], Beweis am einfachsten durch Entwicklung in eine geometrische Reihe). Gilt noch $\sum_n a_{nk} \geq 0$, so erfüllt A die (AB) bei absoluter Limitierung entsprechende Eigenschaft. Aus (AB) folgt hier jedoch noch nicht, daß die e_i zusammen mit höchstens einer weiteren Folge $\mathfrak{d}$ eine Basis im Wirkfeld bilden. (Das beruht darauf, daß der Dual des Raumes der absolut konvergenten Reihen nicht separabel ist.) Man erzwingt dies mit Hilfe einer „Grundmengenbedingung". Sonst bereitet die Übertragung keine besonderen Schwierigkeiten.

3. Man kann auch nichtnormale Matrizen A untersuchen. Im allgemeinen benötigt man hierfür F-Räume ([44], [45]). Hier ist das jedoch nicht nötig. Denn erfüllt eine Matrix A ohne leere Spalten (AB), so ist das Wirkfeld $\mathfrak{A}$ ein BK-Raum mit der Norm

$$\|x\| = \sup_{m,n} \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k \right|.$$

Bei der Übertragung der Sätze auf nichtnormale Matrizen muß man darauf achten, daß gewisse „unangenehme" Matrizen (AB) erfüllen, z.B. Matrizen, die außer $\{0, 0, \ldots\}$ keine Folge limitieren, oder Matrizen, die aus einer divergenten Spalte und sonst Nullen bestehen.

9. Starke Limitierbarkeit

Eine Folge $\mathfrak{x}$ heißt stark C_1-limitierbar zum Werte x, wenn

$$|x_0 - x| + \cdots + |x_n - x| = o(n+1)$$

ist. Die zum Werte Null stark C_1-limitierbaren Folgen bilden einen BK-Raum mit der Norm

$$\|\mathfrak{x}\| = \sup_n \frac{|x_0| + \cdots + |x_n|}{n+1}.$$

In diesem BK-Raum bilden die $\mathfrak{e}_i$ eine Basis. Daher ist unsere Theorie anwendbar. Bei der konkreten Durchführung sind noch gewisse Schwierigkeiten zu überwinden, wie wir am Beispiel der Konvergenzfaktoren ausführen.

Satz 5 (Konvergenzfaktoren bei starker Limitierbarkeit). *Folgende Eigenschaften einer Zahlenfolge $\{f_k\}$ sind gleichbedeutend:*

1° *$\sum f_k x_k$ konvergiert für jede stark C_1-limitierbare Folge $\{x_k\}$.*

2° *Es gilt $f_k \to 0$ und*

$$\sum_{p=0}^{\infty} |f_{k_p}|\,|k_p - k_{p-1}| < \infty,$$

wenn die k_p folgendermaßen induktiv definiert sind:

$k_{-1} = -1$; k_p ist die kleinste ganze Zahl $> k_{p-1}$ mit $|f_{k_p}| > |f_k|$ für $k > k_p$.

Bemerkung. Die $|f_{k_p}|$ sind demnach echte Betragsmaxima „nach rechts". Außerdem ist $|f_{k_p}| \geq |f_k|$ für $k_{p-1} < k < k_p$. Die Konvergenzfaktorenbedingungen unterscheiden sich von dem sonst Gewohnten, vgl. unten.

Beweis. Es wird genügen, den Beweis zu skizzieren.

1° $\curvearrowright$ 2°. Natürlich gilt $f_k \to 0$. Die Folge

$$x_k = \begin{cases} k_p - k_{p-1} & \text{für} \quad k = k_p,\ p = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist zwar im allgemeinen nicht stark C_1-limitierbar, jedoch gilt $\|\mathfrak{x}\| = 1$. Daher ist für jedes $v_k \to 0$ die Folge $v_k x_k$ stark C_1-limitierbar, woraus die Konvergenz der Reihe in 2° folgt.

2° $\curvearrowright$ 1°. Es genügt zu zeigen, daß für jedes $\mathfrak{x}$ mit $\|\mathfrak{x}\| = 1$ die Beziehung $\sum |f_k x_k| \leq \sum |f_{k_p}|\,(k_p - k_{p-1})$ gilt. Dies sehen wir durch schrittweise Abänderung von $\mathfrak{x}$ unter Erhaltung der Bedingung $\|\mathfrak{x}\| = 1$ ein. Wir vergrößern $|x_{k_0}|$ auf Kosten anderer $|x_k|$ mit möglichst kleinem Index k, bis $|x_{k_0}|$ den Wert $k_0 - k_{-1}$ erreicht. Analoges tun wir bei $k_1, k_2, \ldots$. Abgesehen von dem trivialen Fall, wo das Verfahren abbricht, gelangen wir so zu der im ersten Beweisteil genannten Folge. Bei jedem Schritt wird $\sum |f_k x_k|$ nicht verkleinert, w. z. z. w.

Zum Vergleich führen wir weitere Konvergenzfaktoren für verschiedene Arten der C_1-Limitierbarkeit an. Am einfachsten gewinnt man die Bedingungen durch Betrachtung der Matrix, die die C_1-Transformierte $\{y_n\}$ in $\{f_k x_k\}$ abbildet, vgl. [36]. Im folgenden sind jeweils 1° und 2° äquivalent.

1° $\sum f_k x_k$ konvergiert für jedes C_1-limitierbare x.
2° $\sum (k+1)|f_k - f_{k+1}| < \infty$, $f_k \to 0$.
1° $\sum f_k x_k$ konvergiert für jedes $|C_1|$-limitierbare x.
2° $\sup (k+1)|f_k| < \infty$, $\sum f_k$ konvergiert.
1° $\sum |f_k x_k|$ konvergiert für jedes C_1-limitierbare x.
2° $\sum (k+1)|f_k| < \infty$.
1° $\sum |f_k x_k|$ konvergiert für jedes $|C_1|$-limitierbare x.
2° $\sup (k+1)|f_k| < \infty, \sum |f_k| < \infty$.

Literatur

Mit F, R, Z wird auf die Referate in den Fortschritten der Mathematik, den Mathematical Reviews und im Zentralblatt für Mathematik hingewiesen.

[1] AGNEW, R. P.: Convergence fields of methods of summability. Ann. of Math. (2) **46**, 93—101 (1945). R **6**, 150. — [2] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires, insbesondere S. 90ff. Warschau 1932. F **58**, 420; Z **5**, 209. — [3] BOSANQUET, L. S.: A mean value theorem. J. Lond. Math. Soc. **16**, 146—148 (1941). R **3**, 144. Z **28**, 219. — [4] BOSANQUET, L. S.: Note on the Bohr-Hardy theorem. J. Lond. Math. Soc. **17**, 166—173 (1942). F **68**, 137. R **4**, 194. Z **28**, 149. — [5] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors. I. J. Lond. Math. Soc. **20**, 39—48 (1945). R **7**, 432. — II. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **50**, 295—304 (1948). R **10**, 112. Z **30**, 248. — III. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **50**, 482—496 (1949). R **10**, 368. Z **32**, 404. — [6] BROMWHICH, T. J. I'A.: An introduction to the theory of infinite series. 2. Aufl., S. 427. London 1926. F **52**, 208. — [7] CESÀRO, E.: Sur les lois asymptotiques des nombres. Rom. Accad. L. Rend. (4) $\mathbf{IV}_1$, 452—457 (1888). F **20**, 188. — [8] CHANDRASEKHARAN, K., and S. MINAKSHISUNDARAM: Typical means. Oxford 1952. R **14**, 1077. Z **47**, 299. — [9] DAREVSKY, V.: On Toeplitz's methods. Bull. Acad. Sci. URSS., Sér. Math. **11**, 3—32 (1947). R **8**, 510. Z **34**, 34. — [10] GAIER, D., e K. ZELLER: Über den 0-Umkehrsatz für das C_k-Verfahren. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **3**, 83—88 (1954). R **16**, 124. — [11] GARABEDIAN, H. J., u. W. C. RANDELS: Theorems on Riesz means. Duke Math. J. **4**, 529—533 (1938). F **64**, 174. Z **19**, 209. — [12] HARDY, G. H.: On certain oscillating series. Quart. J. Math. **38**, 269—288 (1907). F **38**, 293. — [13] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. R **11**, 25. Z **32**, 58. — [14] HARDY, G. H., and M. RIESZ: The general theory of Dirichlet's series. Cambridge 1915. F **45**, 387. — [15] IYENGAR, K. S. K.: On linear transformations of bounded sequences. Proc. Ind. Acad. Sci. A I; **7**, 399—410; II: **8**, 20—38; III: **8**, 135—144 (1938). F **64**, 169. Z **19**, 308. — [16] JACOB, M.: Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittel für Integrale bei gleicher reeller Ordnung $k > 0$. Math. Z. **26**, 672—682 (1927). F **53**, 221. — [17] JACOB, M.: Über die Verallgemeinerung einiger Theoreme von Hardy in der Theorie der Fourierschen Reihen. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **26**, 470—492 (1927). F **53**, 249. — [18] JURKAT, W.: Über Rieszsche Mittel mit unsteitgem Parameter. Math. Z. **55**, 8—12 (1951). R **13**, 933. Z **44**, 62. — [19] JURKAT, W.: Über Rieszsche Mittel und verwandte Klassen von Matrixtransformationen. Math. Z. **57**, 353—394 (1953). R **14**, 866. Z **50**, 66. — [20] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z. **55**, 92—108 (1951). R **13**, 934. Z **44**, 63. — [21] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z. **56**, 152—178 (1952). R **14**, 158. Z **47**, 64. — [22] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Summierbarkeits-

faktoren. Math. Z. **58**, 186—203 (1953). R **15**, 305. Z **50**, 67. — [*23*] Knopp, K.: Folgenräume und Limitierungsverfahren. Rend. Mat. Roma **5**, 11, 269—298 (1952). — [*24*] Lorentz, G. G.: Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein Cesàro-Verfahren sind. Math. Z. **51**, 85—91 (1948). R **10**, 31. Z **30**, 148. — [*25*] Macphail, M. S.: On some recent developments in the theory of series. Canad. J. Math. **6**, 405—409 (1954). — [*26*] Mazur, S.: Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren. Studia Math. **2**, 40—50 (1930). F **56**, 906. — [*27*] Ostrowski, A. M.: Note on bounds for determinants with dominant principal diagonal. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 26—30 (1952). R **14**, 611. Z **46**, 12. — [*28*] Peyerimhoff, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **55**, 23—54 (1951). (Auch Dissertation Tübingen 1951.) R **13**, 933. Z **44**, 64. — [*29*] Peyerimhoff, A.: Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z. **57**, 265—290 (1953). R **14**, 865. Z **50**, 67. — [*30*] Peyerimhoff, A.: Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen. Math. Z. **59**, 417—424 (1954). R **15**, 617. — [*31*] Rajagopal, C. T.: Some limit theorems. Amer. J. Math. **70**, 157—166 (1948). R **9**, 425. Z **41**, 83. — [*32*] Riesz, M.: Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques. C. R. Acad. Sci. Paris **152**, 1651—1654 (1911). F **42**, 272. — [*33*] Riesz, M.: Sur une théoreme de la moyenne et ses applications. Acta Szeged **1**, 114—126 (1923). F **49**, 707. — [*34*] Rogosinski, W. W.: On Hausdorff's method of summability. Proc. Cambridge philos. Soc. **38**, 166—192 (1942). F **68**, 133. R **3**, 296. Z **28**, 216. — [*35*] Sargent, W. L. C.: A mean value theorem involving Cesàro means. Proc. Lond. Math. Soc. **49**, 227—240 (1946). R **8**, 260. — [*36*] Schur, I.: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. f. Math. **151**, 79—111 (1920). F **47**, 197. — [*37*] Verblunsky, S.: On the limit of a function at a point. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **32**, 163—199 (1931). F **57**, 294. Z **1**, 207. — [*38*] Wilansky, A.: An application of Banach linear functionals to summability. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 59—68 (1949). R **11**, 243. Z **35**, 353. — [*39*] Wilansky, A.: Summability matrices coincident with regular matrices, Banach space methods. Proc. Int. Congr. Math. **1950**, 424. — [*40*] Wilansky, A.: Summability: the inset, replaceable matrices, the basis in summability space. Duke Math. J. **19**, 647—660 (1952). R **14**, 369. Z **47**, 300. — [*41*] Wilansky, A., and K. Zeller: Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc. **78**, 501—509. — [*42*] Wlodarski, L.: Sur les méthodes continues de limitation. I, II. Studia math. **14**, 161—199 (1955). — [*43*] Zeller, K.: Allgemeine Eigenschaften von Matrixtransformationen. Diss. Tübingen 1950. — [*44*] Zeller, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951). R **12**, 604. Z **45**, 334. — [*45*] Zeller, K.: Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1951). R **13**, 934. Z **45**, 334. — [*46*] Zeller, K.: Über konvergenztreue Matrixverfahren (Vortrag Berlin 1951). Jber. dtsch. Math.-Ver. **56**, 11 (1952). — [*47*] Zeller, K.: Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren. Math. Z. **56**, 134—151 (1952). R **14**, 158. Z **46**, 64. — [*48*] Zeller, K.: Approximation in Wirkfeldern von Summierungsverfahren. Arch. Math. **4**, 425—431 (1953). R **15**, 618. Z **52**, 55. — [*49*] Zeller, K.: Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen. Math. Z. **59**, 271—277 (1953). R **15**, 618. Z **52**, 55. — [*50*] Zygmund, A.: Two notes on the summability of infinite series. Colloq. Math. **1**, 225—229 (1948). R **10**, 446.

Dept. of Math., Lehigh University, Bethlehem, Pa. (USA.)

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 14. Juni 1955.)

KUNLE, H.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 270—285 (1956)

Über T-Figuren in einem quadratischen Komplex

Von
HEINZ KUNLE

Unter einer *T-Figur* versteht man ein Quadrupel von Geradenkongruenzen mit der Eigenschaft, daß die vier zu denselben Parameterwerten u, v gehörigen Geraden ein windschiefes Vierseit bilden, dessen Ecken die Brennflächen der Kongruenzen erzeugen. Man nennt Paare gegenüberliegender Kongruenzen *verschränkt*. Solche Figuren sind von verschiedenen Autoren untersucht worden, insbesondere von S. FINIKOFF [5] und R. CALAPSO [4]. Hier sollen solche T-Figuren betrachtet werden, deren Kongruenzen einem quadratischen Komplex angehören. Dabei werden die von G. BOL [3][1]) mittels halbinvarianter Methoden gewonnenen Ableitungsgleichungen für T-Figuren verwendet.

Der quadratische Komplex kann von verschiedener Art sein. Gehört er der Gattung 46 an[2]), so zeigt sich, daß alle Kongruenzen R-Systeme sind und ein konjugiertes Quadrupel bilden. Die Paare gegenüberliegender Kongruenzen und auch die Diagonalenkongruenzen der T-Figur sind in beiden Richtungen schichtbildend. Die vier Brennflächen sind Regelflächen, die wechselseitig W-Transformierte sind und derselben linearen Kongruenz angehören; sie sind in einer einparametrigen Schar von Kongruenzregelflächen enthalten, die als Schichtflächen einer BIANCHI-Konfiguration auftreten. Im Geradenraum ergibt sich eine spezielle Zentralbewegung im Sinne der projektiven Kinematik [1]; dieser Tatbestand erlaubt dann eine geometrische Konstruktion der Figur. Sie hängt von einer Funktion einer Veränderlichen ab.

Außerdem ist es noch möglich, daß der quadratische Komplex der Gattung 49 oder 45 angehört. Dann sind zwei gegenüberliegende Brennflächen der T-Figur Teile derselben nichtentarteten Quadrik, desselben Kegels zweiter Ordnung oder (dual analog) desselben Kegelschnitts. Hierbei ist noch eine Funktion zweier Veränderlichen willkürlich wählbar.

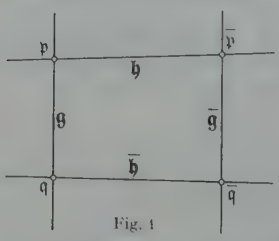

Fig. 1

1. Seien (vgl. Figur) $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$ die Ecken und

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{g} = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}), & \mathfrak{h} = (\mathfrak{p}\,\bar{\mathfrak{p}}), & \mathfrak{b} = (\mathfrak{p}\,\bar{\mathfrak{q}}), \\ \bar{\mathfrak{g}} = (\bar{\mathfrak{p}}\,\bar{\mathfrak{q}}), & \bar{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{q}}), & \bar{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{p}}) \end{cases}$$

[1]) Die in [3] entwickelten Formeln entsprechen den hier verwendeten, die aus [2] Bd. 3 entnommen sind. Alle folgenden Hinweise auf [2] beziehen sich auf diesen dritten Band. Herrn G. BOL sei auch an dieser Stelle für sein förderndes Interesse an der vorliegenden Untersuchung gedankt.

[2]) Enzykl. der Math. Wiss. III 2 C.

die Kanten bzw. Diagonalen des Vierseits der T-Figur für die Parameterwerte u, v. Dann gelten nach G. Bol [3], [2] Ableitungsgleichungen der Form

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{p}_i = \bar{a}_i \bar{\mathfrak{p}} + c_i \mathfrak{q}, & \mathfrak{q}_i = \bar{b}_i \bar{\mathfrak{q}} + d_i \mathfrak{p}, \\ \bar{\mathfrak{p}}_i = a_i \mathfrak{p} + \bar{c}_i \bar{\mathfrak{q}}, & \bar{\mathfrak{q}}_i = b_i \mathfrak{q} + \bar{d}_i \bar{\mathfrak{p}}, \end{cases} \qquad i = 1, 2,$$

wo links halbinvariante Ableitungen stehen. Die Integrierbarkeitsbedingungen lauten:

$$(3)\qquad [a] = [\bar{a}] = [b] = [\bar{b}] = [c] = [\bar{c}] = [d] = [\bar{d}] = 0,$$

$$(4)\qquad \begin{cases} [p] = [\bar{a}\, a] + [c\, d], \\ [q] = [\bar{b}\, b] + [d\, c], \\ [\bar{p}] = [a\, \bar{a}] + [\bar{c}\bar{d}], \\ [\bar{q}] = [b\, \bar{b}] + [\bar{d}\, \bar{c}], \end{cases} \qquad (5)\qquad \begin{cases} [\bar{a}\bar{c}] + [c\, \bar{b}] = 0, \\ [a\, c] + [\bar{c}\, b] = 0, \\ [\bar{b}\bar{d}] + [d\, \bar{a}] = 0, \\ [b\, d] + [\bar{d}\, a] = 0. \end{cases}$$

Dabei bedeutet etwa

$$[p] = \partial_2 p_1 - \partial_1 p_2, \quad [a] = a_{12} - a_{21}, \quad [a\, b] = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Für die Geradenvektoren (1) erhält man wegen (2) die Ableitungsgleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{g}_i = \bar{b}_i \mathfrak{d} - \bar{a}_i \bar{\mathfrak{d}}, & \mathfrak{h}_i = \bar{c}_i \mathfrak{d} + c_i \bar{\mathfrak{d}}, \\ \bar{\mathfrak{g}}_i = a_i \mathfrak{d} - b_i \bar{\mathfrak{d}}, & \bar{\mathfrak{h}}_i = d_i \mathfrak{d} + \bar{d}_i \bar{\mathfrak{d}}, \end{cases}$$

$$(6')\qquad \begin{cases} \mathfrak{d}_i = \quad b_i \mathfrak{g} + \bar{a}_i \bar{\mathfrak{g}} + \bar{d}_i \mathfrak{h} + c_i \bar{\mathfrak{h}}, \\ \bar{\mathfrak{d}}_i = -a_i \mathfrak{g} - \bar{b}_i \bar{\mathfrak{g}} + d_i \mathfrak{h} + \bar{c}_i \bar{\mathfrak{h}}. \end{cases}$$

Nun sei ein fester quadratischer Komplex

$$(7)\qquad \langle \mathfrak{k}\mathfrak{k} \rangle = \sum_0^5 \gamma_{ij} k_i k_j = 0, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \gamma_{ij} = \text{konstant},$$

gegeben, dem die Kongruenzen der T-Figur angehören sollen. Daher ist

$$(8)\qquad \langle \mathfrak{g}\mathfrak{g} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{g}}\bar{\mathfrak{g}} \rangle = \langle \mathfrak{h}\mathfrak{h} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{h}}\bar{\mathfrak{h}} \rangle = 0.$$

Differenziert man die erste Gl. (8), so erhält man

$$(9)\qquad \bar{b}_i \langle \mathfrak{g}\mathfrak{d} \rangle - \bar{a}_i \langle \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{d}} \rangle = 0, \quad i = 1, 2.$$

Wir setzen nun durchgängig voraus, daß die Kongruenzen der Figur nicht entarten, so daß

$$(10)\qquad [a\, b]\, [\bar{a}\, \bar{b}]\, [c\, \bar{c}]\, [d\bar{d}] \neq 0.$$

Dann folgt aus (9) und den analogen Gleichungen

$$(11)\qquad \begin{cases} \langle \mathfrak{g}\mathfrak{d} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{g}}\mathfrak{d} \rangle = \langle \mathfrak{h}\mathfrak{d} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{h}}\mathfrak{d} \rangle = 0, \\ \langle \mathfrak{g}\bar{\mathfrak{d}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{g}}\bar{\mathfrak{d}} \rangle = \langle \mathfrak{h}\bar{\mathfrak{d}} \rangle = \langle \bar{\mathfrak{h}}\bar{\mathfrak{d}} \rangle = 0. \end{cases}$$

Man liest ab: *Die von* $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{h}}$ *bzw.* $\mathfrak{d}, \bar{\mathfrak{d}}$ *im Geradenraum aufgespannten Räume* $\boldsymbol{U}_3$ *bzw.* $\boldsymbol{U}_1$ *sind für jedes Wertepaar* u, v *in bezug auf den quadratischen Komplex* (7) *total-polar.*

Mit den Abkürzungen

$$(12)\qquad \begin{cases} K = \langle \mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\rangle, & M = \langle \bar{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{h}\rangle, & G = \langle \mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{g}}\rangle - \langle \mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle, \\ L = \langle \mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{h}}\rangle, & N = \langle \bar{\mathfrak{g}}\,\bar{\mathfrak{h}}\rangle, & H = \langle \mathfrak{h}\,\bar{\mathfrak{h}}\rangle + \langle \mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle \end{cases}$$

folgt aus (11) bei nochmaliger Differentiation

$$(13)\qquad \begin{cases} \bar{b}_i\langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\rangle + \bar{a}_i G + \bar{d}_i K + c_i L = 0, \\ \bar{a}_i\langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle + \bar{b}_i G - d_i K - \bar{c}_i L = 0, \\ \bar{c}_i\langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\rangle - c_i H - \bar{a}_i M - b_i K = 0, \\ c_i\langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle + \bar{c}_i H - \bar{b}_i M - a_i K = 0, \\ d_i\langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\rangle + \bar{d}_i H + \bar{a}_i N + b_i L = 0, \\ \bar{d}_i\langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle + d_i H - \bar{b}_i N - a_i L = 0, \\ a_i\langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\rangle - b_i G - c_i N - \bar{d}_i M = 0, \\ b_i\langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle + a_i G - \bar{c}_i N - d_i M = 0. \end{cases}$$

Führt man nun wie in [2] die Torsallinien der Kongruenz $\mathfrak{g}(u, v)$ als Parameterkurven ein und normiert geeignet, so gilt

$$(14)\qquad \bar{a}_2 = \bar{b}_1 = 0, \quad \bar{a}_1 = \bar{b}_2 = 1$$

und

$$(15)\qquad c_1 + \bar{c}_2 = 0, \quad d_2 + \bar{d}_1 = 0.$$

Jetzt folgt aus den vier Relationen $(13)_1$ und $(13)_2$

$$(16)\qquad \begin{cases} \langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d}\rangle = -\bar{d}_2 K - c_2 L, \\ \langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}}\rangle = \quad d_1 K + \bar{c}_1 L, \end{cases} \qquad G = d_2 K + \bar{c}_2 L.$$

Die Gln. $(13)_3$ bis $(13)_6$ erhalten die Gestalt

$$(17)\qquad \begin{cases} M + c_1 H + (b_1 - \bar{c}_1 \bar{d}_2) K - c_2 \bar{c}_1 L = 0, \\ c_2 H + (b_2 - \bar{c}_2 \bar{d}_2) K - c_2 \bar{c}_2 L = 0, \\ \bar{c}_1 H + (-a_1 + c_1 d_1) K + c_1 \bar{c}_1 L = 0, \\ -M + \bar{c}_2 H + (-a_2 + c_2 d_1) K + c_2 \bar{c}_1 L = 0, \\ N + \bar{d}_1 H + (b_1 - c_2 d_1) L - d_1 \bar{d}_2 K = 0, \\ \bar{d}_2 H + (b_2 - c_2 d_2) L - d_2 \bar{d}_2 K = 0, \\ d_1 H + (-a_1 + \bar{c}_1 \bar{d}_1) L + d_1 \bar{d}_1 K = 0, \\ -N + d_2 H + (-a_2 + \bar{c}_1 \bar{d}_2) L + d_1 \bar{d}_2 K = 0. \end{cases}$$

2. Wir setzen nun bis auf weiteres voraus[3]), daß der Komplex (7) nicht Tangentenkomplex einer Fläche zweiter Ordnung F_2 ist, so daß

$$K L M N \neq 0 \text{ [4])}. \tag{18}$$

Addition von $(17)_1$ und $(17)_4$, sowie von $(17)_5$ und $(17)_8$ liefert

$$a_2 - b_1 = 0, \quad c_2 d_1 - \bar{c}_1 \bar{d}_2 = 0, \tag{19'}$$

also

$$[a\,\bar{a}] + [b\,\bar{b}] = 0, \quad [c\,d] + [\bar{c}\,\bar{d}] = 0. \tag{19}$$

Nach [2] gilt somit: *Sämtliche Kongruenzen der T-Figur sind W-Strahlensysteme.*

Die Gl. $(17)_3$ ist mit $(17)_2$, ebenso $(17)_7$ mit $(17)_6$ gleichwertig. Aus $(17)_2$ und $(17)_6$ folgt schließlich noch

$$(b_2 + c_1 \bar{d}_2 - c_2 \bar{d}_1)\, \bar{d}_2 K + (-b_2 + c_1 \bar{d}_2 - c_2 \bar{d}_1)\, c_2 L = 0. \tag{20}$$

Außerdem stellen $(17)_2$, $(17)_4$, $(17)_8$ drei Bedingungen für (7) dar.

Es sind noch $(13)_7$ und $(13)_8$ auszuwerten. $(13)_8$ ist mit $(13)_7$ gleichwertig. $(13)_7$ führt auf

$$[p]\,(\bar{d}_2 K + c_2 L) = 0, \tag{21}$$

$$c_1 c_2 [p]\, L + \{-c_2 d_2 [p] + ([p] - a_2)\,(b_2 + c_1 \bar{d}_2 - c_2 \bar{d}_1)\}\, K = 0. \tag{22}$$

Aus (21) ergibt sich eine Alternative.

Wenn (im ersten Fall)

$$\bar{d}_2 K + c_2 L = 0, \tag{23}$$

so zerfällt der quadratische Komplex (7) in zwei lineare Komplexe, derart, daß gegenüberliegende Kongruenzen der T-Figur jeweils demselben linearen Komplex angehören.

Zunächst folgt nämlich aus (23), (20) und (5)

$$b_2 = a_1 = 0,$$

und aus (22) folgt weiter

$$c_1 \bar{d}_2 - c_2 \bar{d}_1 = 0,$$

so daß wegen

$$[a\,\bar{b}] = [\bar{a}\,b] = [c\,\bar{d}] = [\bar{c}\,d] = 0 \tag{24}$$

[3]) Auch wird vorläufig angenommen, daß keine der Brennflächen in eine Kurve entartet, so daß

$$[\bar{a}c]\,[a\bar{c}]\,\;[\bar{b}d]\,[b\bar{d}] \neq 0.$$

[4]) Ist nämlich etwa $K = 0$ identisch in u, v, so gehören alle Tangenten der Fläche $\mathfrak{p}$ zu (7), und man sieht leicht, daß $\mathfrak{p}$ eine F_2 (Quadrik oder Kegel) ist. Denn eine allgemeine Ebene schneidet $\mathfrak{p}$ in einer Kurve zweiter Ordnung. Der Komplex (7) ist der Tangentenkomplex dieser F_2 von der Gattung 49 oder 45. Diesen Fall behandeln wir später in 6.

und (19) nach [2] gegenüberliegende Kongruenzen in gleichen linearen Komplexen liegen. Da aber der quadratische Komplex (7) eindeutig bestimmt ist, zerfällt er in diese beiden linearen Komplexe.

Wegen (16) und (19) bedeutet (23), daß die Diagonalen im Komplex (7) liegen. *Wenn die Diagonalenkongruenzen dem quadratischen Komplex angehören, so zerfällt er.*

Aber auch die Umkehrung gilt: *Wenn der quadratische Komplex* (7) *zerfällt, so gehören gegenüberliegende Kongruenzen der T-Figur dem gleichen linearen Komplex an, und die Diagonalen liegen in der linearen Schnittkongruenz der beiden linearen Komplexe.*

Wenn nämlich $\mathfrak{g}$ einem linearen Komplex $\boldsymbol{k}$ angehört, so liegt eine benachbarte Kongruenz, etwa $\mathfrak{h}$, nicht auch in $\boldsymbol{k}$, da nach [2] die Diagonalen in $\boldsymbol{k}$ liegen, und also andernfalls von $\mathfrak{p}$ die Geraden $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{d}$ des Komplexes ausgingen. Der Komplex $\boldsymbol{k}$ wäre speziell und $\mathfrak{p}$ die singuläre Gerade, entgegen der Annahme in Fußnote [3]). Daraus folgt alles.

3. Der Komplex (7) möge nun weiterhin nicht zerfallen, so daß in (21) der zweite Fall $[p]=0$ eintritt. Wegen

$$[p] = -[q] = -[\bar{p}] = [\bar{q}]$$

folgt

$$[p] = [q] = [\bar{p}] = [\bar{q}] = 0. \tag{25}$$

Dies bedeutet, daß sich die vier Brennflächen der T-Figur bis auf konstante Faktoren in eindeutiger Weise so normieren lassen, daß die Größen $p_i, q_i, \bar{p}_i, \bar{q}_i$ *verschwinden.* Wir denken uns dies durchgeführt. Die halbinvariante Differentiation reduziert sich jetzt auf die gewöhnliche.

Nun ist

$$b_2 + c_1\bar{d}_2 - c_2\bar{d}_1 \neq 0, \tag{26}$$

da sonst wegen (20) wieder (24) gelten würde, was doch ausgeschlossen war. Daher ist (20) nicht identisch erfüllt, und der Komplex (7) wird durch (8), (11), (16), $(17)_2$, $(17)_4$, $(17)_8$ und (20) eindeutig bestimmt. Aus (22) und (19′) folgt weiter

$$a_2 = b_1 = 0 \tag{27′}$$

oder also

$$[a\bar{a}] = [b\bar{b}] = 0, \tag{27}$$

woraus noch wegen (25) und (4) kommt

$$[c\,d] = [\bar{c}\,\bar{d}] = 0. \tag{28}$$

Die Gln. (25), (27), (28) lassen sich nach [2] so deuten[5]):

[5]) Dabei sollen die bisher gemachten Allgemeinheitsannahmen gelten.

Die T-Figur im quadratischen Komplex (7) besteht aus einem konjugierten Quadrupel von Kongruenzen, d.h. die Paare gegenüberliegender Kongruenzen sind gegenseitig schichtbildend derart, daß die sich entsprechenden Torsallinien eines solchen Paares auf allen Schichtflächen ein konjugiertes Netz bilden. Die Brennflächen und Schichtflächen haben übereinstimmende Asymptotenlinien.

Die Kongruenzen sind sämtlich R-Strahlensysteme.

Die Diagonalenkongruenzen sind ebenfalls verschränkt und folglich gegenseitig schichtbildend.

Um schließlich die Bedingungen zu ermitteln, die sich aus (16), $(17)_2$, $(17)_4$, $(17)_8$, (20) bei nochmaliger Differentiation ergeben, bemerkt man zunächst, daß die Ableitungen aller vorkommenden Klammersymbole (7) verschwinden. Ferner sind nach (3) die Größen $a_i, \bar{a}_i, \ldots, \bar{d}_i$ Gradientvektoren von acht Funktionen $a, \bar{a}, \ldots, \bar{d}$, und wir können wie in [2] $\bar{a}$ und $\bar{b}$ als Parameter u, v wählen. Dann gilt

$$(29)\qquad \begin{cases} a_1 = U(u), & b_1 = 0, \\ a_2 = 0, & b_2 = V(v), \end{cases} \qquad d = d(c), \quad \bar{d} = \bar{d}(\bar{c}),$$

mit den Relationen

$$(30)\qquad c_1 + \bar{c}_2 = 0, \qquad U c_2 + V \bar{c}_1 = 0, \qquad U\bar{d}' - V d' = 0.$$

Die früheren Formeln bleiben richtig, da (14) auch jetzt gültig ist.

Aus

$$(31)\qquad \bar{c}_1 \langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d} \rangle + c_2 \langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}} \rangle = 0$$

folgt zunächst zusammen mit (30)

$$(32)\qquad \begin{cases} \bar{c}_1 + \lambda c_2 = 0, \\ \bar{c}_2 + \quad c_1 = 0, \end{cases} \qquad c_{11} - \lambda c_{22} = 0, \qquad \lambda = \text{konstant}.$$

Ferner ist wegen (30)

$$(33)\qquad U - \lambda V = 0,$$

so daß also U und V konstant sind. Ebenso folgt aus (30)

$$(34)\qquad d' - \lambda \bar{d}' = 0,$$

und wegen $[c\,\bar{c}] \neq 0$ sind auch d' und $\bar{d}'$ konstant. Somit ist alles auf c_1, c_2 und Konstanten zurückgeführt[6]).

Wenn nun c_1 und c_2 konstant sind, so folgen aus (16), (17), (20) keine neuen Relationen. Die Figur hängt nur noch von Konstanten ab. Man zeigt leicht, daß alle Flächen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$ voneinander verschiedene *Quadriken desselben Büschels* sind, dessen *Fundamentalkurve ein Vierseit* ist.

[6]) Wegen (10) sind die Konstanten λ, V, $\bar{d}'$ von Null verschieden, desgleichen c_1 und c_2.

Lassen wir diesen trivialen Fall außer acht, so folgt aus (16), (17), (20) bei weiterer Differentiation

$$c_1 = \alpha c_2 + \omega \tag{35}$$

mit

$$\alpha = \sqrt{\lambda}, \quad \omega = \sqrt{V\delta^{-1}}, \quad \delta = \bar{d}', \tag{36}$$

oder, wenn man (35) und (32) integriert:

$$c = C(u + \alpha^{-1} v) + \omega u, \quad \bar{c} = -\alpha C(u + \alpha^{-1} v) - \omega v. \tag{37}$$

Dabei ist C eine beliebige Funktion einer Veränderlichen. $a, b, d, \bar{d}$ sind der Reihe nach lineare Funktionen von $u, v, c, \bar{c}$.

Die T-Figur hängt jetzt noch von einer Funktion einer Veränderlichen (und Konstanten) ab.

Für die Klammersymbole findet man

$$\begin{cases} L = \alpha\delta K, \quad M = -\alpha V K, \quad N = -\lambda\delta V K, \\ G = -H = -\alpha\delta\omega K, \quad \langle \bar{\mathfrak{d}}\,\bar{\mathfrak{d}} \rangle = \lambda \langle \mathfrak{d}\,\mathfrak{d} \rangle = \lambda\delta\omega K. \end{cases} \tag{38}$$

4. Nun sollen noch einige geometrische Eigenschaften der T-Figur aufgezeigt werden. Zunächst:

Die vier Brennflächen der T-Figur sind Regelflächen.

Denn etwa für $\mathfrak{p}$ gilt bei Differentiation längs der Richtung $\frac{dv}{du} = -\alpha$ mit der Abkürzung

$$\overset{+}{V} = \partial_1 - \alpha\,\partial_2,$$

daß

$$\overset{+}{V}\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}} + \omega\,\mathfrak{q}, \quad \overset{+}{V}\overset{+}{V}\mathfrak{p} = 2\lambda V\mathfrak{p}. \tag{39}$$

Also ist $\mathfrak{p}$ Regelfläche, und ebenso die übrigen Flächen, da $\mathfrak{p}$ geometrisch nicht ausgezeichnet ist.

Wir können annehmen, daß $\mathfrak{p}$ keine Quadrik ist, da sonst c_1 und c_2 konstant wären. Dasselbe gilt für $\mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$. Dann gilt weiter:

Die vier Brennflächen sind sogar Kongruenzregelflächen und gehören derselben linearen Kongruenz an.

Setzt man nämlich

$$\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}} - \alpha V\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{h}} + \alpha\delta\mathfrak{h}, \quad \mathfrak{c} = \bar{\mathfrak{d}} + \alpha\,\mathfrak{d}, \tag{40}$$

so folgt mit der Abkürzung

$$\overset{+}{V} = \partial_1 + \alpha\,\partial_2,$$

daß

$$\begin{cases} \overset{+}{V}\mathfrak{a} = \overset{+}{V}\mathfrak{b} = \overset{+}{V}\mathfrak{c} = 0, \\ V\mathfrak{a} = 2\alpha V\mathfrak{c}, \quad V\mathfrak{b} = 2\alpha\delta\omega\,\mathfrak{c}, \quad V\mathfrak{c} = 2\alpha(\mathfrak{a} + \omega\,\mathfrak{b}). \end{cases} \tag{41}$$

Daraus ergibt sich, daß

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{a} + \omega\,\mathfrak{b} + \sigma\,\mathfrak{c}, \qquad \sigma^2 = 2V \tag{42}$$

fest ist. (42) stellt die beiden Leitlinien der linearen Kongruenz dar; die Erzeugenden der vier Regelflächen, nämlich[7])

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{p} \,(=)\, (\mathfrak{p}, V\mathfrak{p}) \,(=)\, (\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}} + \omega\,\mathfrak{q}) && (=)\, \mathfrak{h} + \omega\,\mathfrak{g},\\
&\mathfrak{q} \,(=)\, (\mathfrak{q}, V\mathfrak{q}) \,(=)\, (\mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{q}} - \alpha\,\delta\,\omega\,\mathfrak{p}) \,(=)\, \bar{\mathfrak{h}} + \alpha\,\delta\,\omega\,\mathfrak{g},\\
&\bar{\mathfrak{p}} \,(=)\, (\bar{\mathfrak{p}}, V\bar{\mathfrak{p}}) \,(=)\, (\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}} + \alpha\,\delta\,\omega\,\mathfrak{p}) \,(=)\, \bar{\mathfrak{g}} - \alpha\,\delta\,\omega\,\mathfrak{h},\\
&\bar{\mathfrak{q}} \,(=)\, (\bar{\mathfrak{q}}, V\bar{\mathfrak{q}}) \,(=)\, (\bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{p}} - \omega\,\mathfrak{q}) && (=)\, \bar{\mathfrak{g}} - \omega\,\bar{\mathfrak{h}},
\end{aligned}\right. \tag{43}$$

sind zu (42) im Geradenraum bezüglich der PLÜCKER-Quadrik polar. Gleichzeitig erkennt man aus (43):

Entsprechende Erzeugende gegenüberliegender Brennflächen treffen die Diagonalen in Punkten, die die beiden anderen Brennflächen harmonisch trennen.

Ferner gilt:

Die entsprechenden Erzeugenden der vier Brennflächen gehören einem Regulus an, der auf der Quadrik

$$y_0 y_1 - \omega\, y_0 y_2 + \alpha\,\delta\,\omega\, y_1 y_3 + \alpha\, V\, y_2 y_3 = 0$$

liegt. Dabei sind die lokalen Koordinaten y_i durch

$$\mathfrak{y} = y_0\,\mathfrak{p} + y_1\,\mathfrak{q} + y_2\,\bar{\mathfrak{p}} + y_3\,\bar{\mathfrak{q}}$$

definiert. Die vier Brennflächen werden also im Geradenraum durch vier Kurven auf einer zweidimensionalen Quadrik in einem festen dreidimensionalen Unterraum $\boldsymbol{U}_3$ repräsentiert, und zwar derart, daß vier korrespondierende Punkte demselben Kegelschnitt angehören. Wir zeigen:

Die Tangenten an diese vier Kurven treffen sich in einem Punkt. Die Brennflächen sind also (über die Ergebnisse in 2. hinaus) *paarweise W-Transformierte voneinander.*

Denn man findet

$$\mathfrak{p}_1 \,(=)\, \mathfrak{q}_1 \,(=)\, \bar{\mathfrak{p}}_1 \,(=)\, \bar{\mathfrak{q}}_1 \,(=)\, \hat{\mathfrak{c}},$$

wobei gesetzt wurde

$$\hat{\mathfrak{c}} = \bar{\mathfrak{b}} - \alpha\,\mathfrak{b}. \tag{44}$$

$\hat{\mathfrak{c}}$ ist offenbar der Pol der Ebene $\boldsymbol{e}$, in welcher die Punkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$ liegen. In dieser Ebene liegt auch der Punkt

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{a} - \omega\,\mathfrak{b}, \tag{45}$$

der wegen (41) fest ist. Daher:

Die einparametrige Schar von Polarebenen zur Kurve (44) *hat den Punkt* (45) *als Fixpunkt. Die Kurve* (44) *ist folglich eben (d.h. zweidimensional).*

Man spricht mit M. BARNER [1] von einer *Zentralbewegung im Sinne der projektiven Kinematik.* Bahnkurven der Bewegung sind jene Kurven, deren

[7]) Das Symbol (=) bedeutet Proportionalität der Vektoren.

Tangenten in den einer Ebene $\boldsymbol{e}$ angehörigen Punkten durch den entsprechenden Punkt $\hat{\mathfrak{c}}$ gehen, also insbesondere die vier Kurven, die unsere Brennflächen darstellen. Die Ebenen $\boldsymbol{e}$ bewegen sich normal zu sich selbst im Sinn der hyperbolischen Geometrie, bezüglich der PLÜCKER-Quadrik als absoluter Quadrik.

Die Fixebene $\boldsymbol{E}$, in der die Kurve $\hat{\mathfrak{c}}$ liegt, wird aufgespannt von (44) und

$$\hat{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{g}} + \alpha V\mathfrak{g}, \qquad \hat{\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{y}} - \alpha\delta\mathfrak{y}. \tag{46}$$

Sie schneidet aus der PLÜCKER-Quadrik $\boldsymbol{Q}$ einen nichtentarteten Kegelschnitt aus, denn ihr Pol in $\boldsymbol{U}_3$ ist $\mathfrak{n}$, und $\mathfrak{n}$ liegt nicht auf $\boldsymbol{Q}$. Die beiden Punkte dieses Kegelschnitts, die zugleich dem Kegelschnitt der bewegten Ebene $\boldsymbol{e}$ angehören, sind

$$\mathfrak{x} = \hat{\mathfrak{a}} + i\omega\,\hat{\mathfrak{b}}, \qquad \mathfrak{s} = \hat{\mathfrak{a}} - i\omega\,\hat{\mathfrak{b}}; \qquad i^2 = -1. \tag{47}$$

In lokalen Koordinaten

$$q_0\mathfrak{n} + q_1\mathfrak{x} + q_2\mathfrak{s} \tag{48}$$

hat der Kegelschnitt in $\boldsymbol{e}$ die Gleichung

$$2q_1q_2 - q_0^2 = 0 \tag{49}$$

mit der Parameterdarstellung

$$q_0 = \tau, \qquad q_1 = 1, \qquad q_2 = \tfrac{1}{2}\tau^2. \tag{49'}$$

Die Parameterwerte von $\mathfrak{x}, \mathfrak{s}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{q}}$ sind bzw. $0, \infty, i-1, -i-1, i+1, -i+1$. Daraus folgt:

Das Doppelverhältnis von vier entsprechenden Erzeugenden der vier Brennflächen $\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{q}}, \bar{\mathfrak{p}}, \mathfrak{q}$ *ist* -1. Ferner: *Die Doppelverhältnisse* DV $(\mathfrak{x}, \mathfrak{s}, \mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{q}})$, DV $(\mathfrak{x}, \mathfrak{s}, \mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{p}})$, DV $(\mathfrak{x}, \mathfrak{s}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ *haben der Reihe nach die Werte* $-1, -1, -i$. Kennt man also für einen Parameterwert $t = t_0$ die Lage von $\mathfrak{p}$, so ist diejenige der übrigen Erzeugenden bestimmt.

Um schließlich den Zusammenhang mit dem quadratischen Komplex (7) noch genauer zu klären, fragen wir: Welche Geraden des Regulus (49) gehören dem Komplex (7) an? Man bestätigt mittels (38), daß die durch (47) repräsentierten Geraden die einzigen sind, oder anders ausgedrückt:

Der Regulus, dessen repräsentierender Kegelschnitt durch die Fixebene $\boldsymbol{E}$ *ausgeschnitten wird, ist dadurch gekennzeichnet, daß er genau diejenigen Geraden der linearen Kongruenz umfaßt, die im quadratischen Komplex enthalten sind.*

Damit ist klar: *Die Fundamentalkurve des vom quadratischen Komplex* (7) *und von der* PLÜCKER*-Quadrik in* $\boldsymbol{U}_3$ *bestimmten Büschels ist der Fixkegelschnitt in* $\boldsymbol{E}$. Alle Quadriken des Büschels berühren sich längs dieses Fixkegelschnitts.

Schließlich zeigt man noch mittels (38), daß

$$\langle \mathfrak{e}\,\mathfrak{e} \rangle = 0.$$

Das bedeutet: *Die Leitlinien der linearen Kongruenz gehören dem quadratischen Komplex* (7) *an.*

Die Figur hängt, wie oben festgestellt, noch von der willkürlichen Funktion C ab. Diese läßt sich nun leicht mit der hyperbolischen Krümmung der ebenen Kurve $\hat{\mathfrak{c}}$ in Verbindung bringen und so geometrisch deuten.

Führt man nämlich statt v einen neuen Parameter s ein:

$$v = f(s), \qquad f' = \xi^{-1},$$

wobei

$$\xi^2 = \omega^2 + (\overset{+}{\Gamma} c)^2$$

gesetzt ist, so erhält man mit

$$\mathfrak{t} = \hat{\mathfrak{c}}', \qquad \mathfrak{y} = \xi^{-1}\{(\overset{+}{V} c)\,\hat{\mathfrak{a}} - \omega^2\,\hat{\mathfrak{b}}\}$$

die Tabelle der Polarprodukte bezüglich der PLÜCKER-Quadrik

	$\hat{\mathfrak{c}}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{y}$
$\hat{\mathfrak{c}}$	-2α	0	0
$\mathfrak{t}$	0	$2\alpha\,\delta$	0
$\mathfrak{y}$	0	0	$2\alpha V$

und die FRENETschen Ableitungsgleichungen

$$\hat{\mathfrak{c}}' = \mathfrak{t},$$
$$\mathfrak{t}' = \delta\,\hat{\mathfrak{c}} + 2c_{12}\xi^{-3}\,\mathfrak{y},$$
$$\mathfrak{y}' = -2\omega^2 c_{12}\xi^{-3}\,\mathfrak{t}.$$

Die hyperbolische Krümmung von $\hat{\mathfrak{c}}$ hat demnach bis auf konstante Faktoren die Gestalt

$$\varkappa = \frac{2C''/\omega}{\{1 + (1 + 2C'/\omega)^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Analogie zur klassischen Krümmungsformel

$$\varkappa = \frac{y''}{\{1 + y'^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

in cartesischen Koordinaten liegt auf der Hand.

5. Nachdem nun die wichtigsten geometrischen Eigenschaften der T-Figur klargestellt sind, gehen wir dazu über, ihre Behandlung dadurch zu vereinfachen, daß wir die Zentralbewegung im Geradenraum als einparametrigen Vorgang darstellen, um so zu einer Konstruktion zu gelangen.

Es sollen $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5$ der Reihe nach dieselben Punkte des $\boldsymbol{R}_5$ darstellen wie (in der bisherigen Bezeichnung) $\hat{\mathfrak{c}}, \mathfrak{x}, \mathfrak{z}, \mathfrak{u}$ und die beiden Punkte $\mathfrak{e}$ in (42).

Wenn dann das Zeichen $\circ$ Polarenbildung an der PLÜCKER-Quadrik bedeutet, so verschwinden alle Produkte $\mathfrak{a}_i \circ \mathfrak{a}_k$ außer

$$\mathfrak{a}_0 \circ \mathfrak{a}_0, \quad \mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{a}_2, \quad \mathfrak{a}_3 \circ \mathfrak{a}_3, \quad \mathfrak{a}_4 \circ \mathfrak{a}_5.$$

Die Normierung von $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_3$ kann so festgelegt werden, daß

$$\mathfrak{a}_0 \circ \mathfrak{a}_0 = \eta, \quad \mathfrak{a}_3 \circ \mathfrak{a}_3 = \bar{\eta}, \quad \eta^2 = \bar{\eta}^2 = 1. \tag{50}$$

Ähnlich läßt sich bewirken, daß

$$\mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{a}_2 = \eta, \quad \mathfrak{a}_4 \circ \mathfrak{a}_5 = \eta, \tag{51}$$

wobei noch Umnormungen

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{a}}_1 = f(t)\,\mathfrak{a}_1, & \bar{\mathfrak{a}}_2 = f^{-1}\,\mathfrak{a}_2, \\ \bar{\mathfrak{a}}_4 = g(t)\,\mathfrak{a}_4, & \bar{\mathfrak{a}}_5 = g^{-1}\,\mathfrak{a}_5 \end{cases} \tag{52}$$

möglich sind.

Die PLÜCKER-Quadrik hat dann in lokalen Koordinaten

$$\mathfrak{a} = \sum x_i\,\mathfrak{a}_i = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \tag{53}$$

die Gleichung

$$Q = \eta\,x_0^2 + 2\eta\,x_1 x_2 + \bar{\eta}\,x_3^2 + 2\eta\,x_4 x_5 = 0. \tag{54}$$

Da die Signatur Null sein soll, kann man vereinfachend

$$\eta = -\bar{\eta} = 1$$

annehmen, so daß aus (54)

$$Q = x_0^2 + 2x_1 x_2 - x_3^2 + 2x_4 x_5 = 0 \tag{54'}$$

wird. Die *Tabelle der Polarprodukte* erhält die Gestalt

(55)

	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$
$\mathfrak{a}_0$	1	0	0	0	0	0
$\mathfrak{a}_1$	0	0	1	0	0	0
$\mathfrak{a}_2$	0	1	0	0	0	0
$\mathfrak{a}_3$	0	0	0	−1	0	0
$\mathfrak{a}_4$	0	0	0	0	0	1
$\mathfrak{a}_5$	0	0	0	0	1	0

Berücksichtigt man (55) und verfügt passend über die Umnormungsmöglichkeiten (52), so findet man die *Ableitungsgleichungen*

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_0' = -b\,\mathfrak{a}_1 - a\,\mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_3' = 0, \\ \mathfrak{a}_1' = a\,\mathfrak{a}_0, & \mathfrak{a}_4' = 0, \\ \mathfrak{a}_2' = b\,\mathfrak{a}_0, & \mathfrak{a}_5' = 0 \end{cases} \tag{56}$$

mit den Invarianten a, b (bei freiem Parameter t).

Ein Punkt (53) ist genau dann fest und fest normiert, wenn die *Stationaritätsbedingungen*

$$\begin{cases} x_0' = -a\,x_1 - b\,x_2, & x_3' = 0, \\ x_1' = b\,x_0, & x_4' = 0, \\ x_2' = a\,x_0, & x_5' = 0 \end{cases} \tag{57}$$

erfüllt sind.

Die *Bahnkurven der Zentralbewegung* für die Punkte der Ebene $\boldsymbol{e}$ sind gegeben durch

$$\mathfrak{b} = x_1\mathfrak{a}_1 + x_2\mathfrak{a}_2 + x_3\mathfrak{a}_3; \qquad x_1, x_2, x_3 \text{ konstant.} \tag{58}$$

Denn die Tangente von (58) geht durch $\mathfrak{a}_0$. Insbesondere sind die vier Erzeugenden der Brennflächen nach den Ergebnissen der vorigen Nummer gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \{0, \ \tfrac{1}{2}\mu^2, \ 1, \ \mu, \ 0, \ 0\}, \\ \mathfrak{q} &= \{0, \ -\tfrac{1}{2}\mu^2, \ 1, \ i\mu, \ 0, \ 0\}, \\ \bar{\mathfrak{p}} &= \{0, \ -\tfrac{1}{2}\mu^2, \ 1, \ -i\mu, \ 0, \ 0\}, \\ \bar{\mathfrak{q}} &= \{0, \ \tfrac{1}{2}\mu^2, \ 1, \ -\mu, \ 0, \ 0\}, \end{aligned}\right. \qquad \mu = \text{konstant.} \tag{59}$$

Wir bestimmen nun die Koeffizienten in der Gleichung

$$\boldsymbol{F} = \langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{a} \rangle = \sum \gamma_{ik} x_i x_k = 0 \tag{60}$$

des quadratischen Komplexes aus folgenden vier Bedingungen I bis IV, die den früher gefundenen geometrischen Eigenschaften des Komplexes entsprechen.

I. Da die Leitlinien $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_5$ (60) erfüllen, ist

$$\gamma_{44} = \gamma_{55} = 0.$$

II. Wegen des Satzes über die Fundamentalkurve des von $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{Q}$ gebildeten, in $\boldsymbol{U}_3$ liegenden Büschels in der vorigen Nummer ist

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{01} = \gamma_{02} = \gamma_{03} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0, \qquad \gamma_{00} = \gamma_{12}.$$

III. Die W-Kongruenz $\mathfrak{g}$ mit den Brennflächen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ besteht aus ∞^1 Regelscharen; ein solcher Regulus wird von derjenigen Ebene aus der PLÜCKER-Quadrik ausgeschnitten, die zur Ebene $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ total-polar ist. Der ausgeschnittene Kegelschnitt hat die Parameterdarstellung

$$\{0, \ i\mu^2, \ 2, \ \mu(1+i), \ -i\mu^2\tau, \ \tau^{-1}\}. \tag{61}$$

Berücksichtigt man, daß (61) im Komplex $\boldsymbol{F}$ enthalten ist (und analog für die übrigen Kongruenzen), so folgt

$$\begin{aligned} &\gamma_{14} = \gamma_{24} = \gamma_{34} = 0, \\ &\gamma_{15} = \gamma_{25} = \gamma_{35} = 0, \end{aligned} \qquad \gamma_{33} - \gamma_{45} + 2\gamma_{12} = 0.$$

Gemäß I, II, III hat man bisher

$$\boldsymbol{F} = \gamma_{12}\boldsymbol{Q} + 2\gamma_{04}x_0x_4 + 2\gamma_{05}x_0x_5 + (\gamma_{33} + \gamma_{12})(x_3^2 + 2x_4x_5). \tag{60'}$$

IV. $\boldsymbol{F}$ soll fest sein. Wegen (57) führt das auf

$$\gamma_{04} = \gamma_{05} = 0.$$

Somit hat man für $\boldsymbol{F}$ mod $\boldsymbol{Q}$ die Darstellung

$$\boldsymbol{F} = x_3^2 + 2x_4x_5 = 0. \tag{62}$$

Wir bezeichnen als *Leitgebilde* jene Figur, die aus den Leitlinien $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_5$ und dem *Leitkegelschnitt* besteht, der von der Ebene $(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2)$ ausgeschnitten wird. Im R_3 stellt das Leitgebilde einen Regulus und zwei Geraden des anderen Regulus auf einer Quadrik dar. Dann gilt auf Grund der Tatsache, daß μ in (62) nicht vorkommt:

Je nach Wahl von μ gibt es zu einer Zentralbewegung, gegeben durch das Leitgebilde und $\mathfrak{a}_0(t)$, ∞^1 mögliche T-Figuren, die demselben Komplex angehören[8]).

Das einparametrige System von Bahnkurven (58) auf $\boldsymbol{Q}$ repräsentiert ∞^1 Regelflächen in derselben linearen Kongruenz; die Erzeugenden, die zum gleichen Parameterwert $t = t_0$ gehören, liegen sämtlich im gleichen Regulus. Man erkennt leicht: *Das System dieser Regelflächen ist identisch mit jedem der beiden Systeme von Schichtflächen der Diagonalenkongruenzen. Die ∞^1 Regelflächen bilden somit eine (spezielle) Konfiguration des Vertauschungstheorems von* BIANCHI. *Je vier unter ihnen fügen sich gemäß* (59) *in eindeutiger Weise zu einer T-Figur zusammen.*

Fassen wir diese ∞^1 T-Figuren in ein *T-Gebilde* zusammen, so können wir sagen: *Das T-Gebilde ist völlig bestimmt durch Vorgabe des Leitgebildes und einer Kurve in der Ebene des Leitkegelschnitts, oder auch durch Vorgabe eines $\boldsymbol{U}_3$ und einer ebenen Kurve in ihm.* Dem T-Gebilde ist der Komplex $\boldsymbol{F}$ eindeutig zugeordnet.

Welcher Art ist der Komplex $\boldsymbol{F}$? Die Determinante von

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F} + \varrho\,\boldsymbol{Q}$$

ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\varrho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\varrho & 0 \end{vmatrix} = \varrho^3 (1+\varrho)^2 (1-\varrho).$$

Demnach hat der Komplex das Symbol [(111) (11) 1] und ist von der Gattung 46[2]). *Die Singularitätenfläche des Komplexes ist eine doppeltgezählte Quadrik, die durch den Leitkegelschnitt repräsentiert wird. Die Doppelgeraden des Komplexes sind die Geraden des Leitgebildes.*

Nun gibt es bekanntlich zu $\boldsymbol{F}$ und seiner Singularitätenfläche noch ∞^1 konsinguläre Komplexe mit derselben Singularitätenfläche. Wie man leicht bestätigt, sind das die Komplexe

$$\boldsymbol{g} = \sigma\, x_3^2 + 2\, x_4\, x_5 + \varrho\,\boldsymbol{Q} = 0$$

[8]) Daß so tatsächlich immer eine T-Figur entsteht, d.h. daß im R_3 geschlossene Vierseite und ihre Brennflächen auftreten, ist fast evident und läßt sich auch rechnerisch leicht bestätigen.

mit σ, ϱ als Parametern. Für beliebig gewähltes, aber festes σ gibt es im Büschel genau einen Kegel, für den sämtliche Punkte der Fixebene $(\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2)$ Doppelpunkte sind, nämlich für $\varrho = 0$, d.i. der Kegel

$$\overline{g} = \sigma\, x_3^2 + 2\, x_4\, x_5 = 0.$$

Er schneidet die total-polare Ebene $(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}_5)$ in einem Kegelschnitt. Für veränderliches σ entsteht ein Büschel von Kegelschnitten mit den Ausartungselementen $\sigma = 0$, $\sigma = \infty$. Die PLÜCKER-Quadrik schneidet den Büschelkegelschnitt $\sigma = -1$ aus. Wegen (62) ist für $\boldsymbol{F}$ $\sigma = +1$. Also:

$\boldsymbol{F}$ ist derjenige Komplex in der konsingulären Schar, dessen Spurkegelschnitt denjenigen der PLÜCKER*-Quadrik harmonisch von den Ausartungselementen trennt. Damit ist $\boldsymbol{F}$ nun völlig charakterisiert.*

Wir fassen zu einer *Konstruktion* zusammen: *Geht man von einem beliebig gewählten Leitgebilde aus, so gibt es dazu ∞^1 konsinguläre quadratische Komplexe, unter denen man nach obiger Vorschrift $\boldsymbol{F}$ auszuwählen hat. Gibt man ferner eine beliebige ebene Kurve in der Ebene des Leitkegelschnitts vor, so ist das T-Gebilde eindeutig bestimmt.*

Oder anders formuliert: Vorgegeben sei eine Kongruenzregelfläche in einer nichtparabolischen linearen Kongruenz. Im zugehörigen $\boldsymbol{U}_3$ des R_5 kann man auf ∞^3 Arten eine Ebene festlegen; es gibt somit ∞^3 mögliche Leitgebilde. Die Kurve $\mathfrak{a}_0(t)$ ist fixiert als Schnitt der Fixebene mit den Tangenten jener Kurve, die die Kongruenzregelfläche darstellt. Die T-Figur ist jetzt innerhalb des T-Gebildes sogar eindeutig bestimmt.

Zu einer Kongruenzregelfläche mit verschiedenen Leitlinien gibt es also ∞^3 T-Figuren, denen sie angehört, nämlich genau eine zu jeder Quadrik, die die Leitlinien enthält.

Nach M. BARNER[9]) zeigt man, daß sich die zu gegebenem Leitgebilde gehörigen T-Gebilde sogar integralfrei darstellen lassen.

6. Betrachten wir nun noch den Fall, daß der quadratische Komplex Tangentenkomplex einer F_2 ist[10]). Diese F_2 ist dann notwendig Brennfläche aller Kongruenzen der T-Figur. Da aber benachbarte Flächen wegen (10) nicht Teile der gleichen F_2 sein können, so folgt, daß etwa $\mathfrak{p}$ und $\overline{\mathfrak{q}}$ derselben F_2 angehören. Der quadratische Komplex besteht aus deren Tangenten, so daß

$$K = N = 0.$$

Aus (17), $(13)_7$, $(13)_8$ kommt jetzt mit $c_2 \neq 0$[3])

$$[a\,\overline{b}] + [\overline{c}\,d] = 0, \qquad [\overline{a}\,b] + [\overline{d}\,c] = 0, \tag{63}$$

$$[a\,\overline{a}] + [\overline{c}\,\overline{d}] = 0, \qquad [\overline{b}\,b] + [d\,c] = 0. \tag{64}$$

[9]) Man vgl. die demnächst im Archiv der Mathematik erscheinende Note von M. BARNER: Geometrische integralfreie Konstruktion der Asymptotenlinien der Regelflächen. Man hat den dort aufgeführten Ausnahmefall einer Geradenschar durch einen festen Punkt etwa auf die Geraden $(\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1)$ anzuwenden.

[10]) Vgl. 2. Dort wurde das zunächst ausgeschlossen. Jedoch sei weiterhin an [3]) festgehalten.

(63) läßt sich nach [2] so deuten: *Die Brennebenen durch* $\bar{\mathfrak{d}}$ *trennen* $\mathfrak{p}$ *und* $\bar{\mathfrak{q}}$ *harmonisch. Die Brennpunkte auf* $\mathfrak{d}$ *trennen* $\mathfrak{p}$ *und* $\bar{\mathfrak{q}}$ *harmonisch.*

(64) bedeutet, falls $\mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ nicht in Torsen (oder Kurven) entarten: *Beide Diagonalenkongruenzen* $\mathfrak{d}$ *und* $\bar{\mathfrak{d}}$ *sind zu den Flächen* $\mathfrak{q}$ *und* $\bar{\mathfrak{p}}$ *konjugiert.* $\mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ sind also *Fundamentaltransformierte von* EISENHART. *Die Kongruenz* $\mathfrak{d}$ *ist für* $\bar{\mathfrak{d}}$ *schichtbildend.*

Geht man etwa von der Parameterdarstellung einer Quadrik

$$\mathfrak{p}\,(=)\,\{1, u, v, uv\}, \qquad \bar{\mathfrak{q}}\,(=)\,\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$$

mit $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$ aus, so kann man für $\mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ zusammenfassend setzen

$$\mathfrak{r}\,(=)\,\{1 + \lambda,\ u + \lambda\alpha,\ \beta + \lambda v,\ u\beta + \lambda v\alpha\},$$

wobei λ dem System von Differentialgleichungen

$$(65)\qquad \begin{cases} [\log \lambda(\alpha - u)(\beta - v)^{-1}]_u + \dfrac{2}{\alpha - u} = 0, \\ [\log \lambda(\alpha - u)(\beta - v)^{-1}]_v - \dfrac{2}{\beta - v} = 0 \end{cases}$$

mit der Integrierbarkeitsbedingung

$$(66)\qquad \frac{\alpha_v}{(\alpha - u)^2} + \frac{\beta_u}{(\beta - v)^2} = 0$$

genügt. *Also hängt jetzt die T-Figur von einer Funktion zweier Veränderlichen ab.* Da für λ ein beliebiger Anfangswert vorgebbar ist, so sind alle ∞^1 Schichtflächen gleichberechtigt, und *es gibt bei vorgegebener Punktzuordnung, d.h. bei gegebenen* α, β, *die* (66) *genügen,* ∞^2 *T-Figuren im quadratischen Komplex*[11]).

Falls aber die F_2 ein Kegel zweiter Ordnung ist, so verläuft alles entsprechend, und auch die Ergebnisse sind ganz die gleichen.

Hierzu ist auch die duale Konstruktion möglich: Statt von einem Kegel kann man von einem Kegelschnitt (als Klassengebilde) ausgehen. Etwa die Brennflächen $\mathfrak{p}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ sind jetzt in Teile des Kegelschnitts entartet.

In den beiden letzterwähnten Fällen gehört der quadratische Komplex der Gattung 45 an, während er für eine (nichtentartete) Quadrik von der Gattung 49 war.

7. Bisher war stets die Entartung einer Brennfläche in eine Kurve von der Betrachtung ausgenommen (abgesehen von der Bemerkung am Schluß der vorigen Nummer). Läßt man nun auch diese Einschränkung fallen, so kann etwa

$$(67)\qquad c_2 = 0$$

[11]) Insbesondere ist als Sonderfall eine aus der Theorie der Komplexflächen bekannte Figur enthalten. Genau dann nämlich, wenn die Diagonalenkongruenzen sogar gegenseitig schichtbildend sind, gilt (25), und alle Kongruenzen sind R-Systeme. Die Flächen $\mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ sind im allgemeinen zweifache Komplexflächen. Die Schichtflächen der Diagonalenkongruenzen bilden zwei einparametrige Systeme von Komplexflächen. Man vgl. hierzu etwa [6], [8].

angenommen werden, so daß $\mathfrak{p}$ eine Kurve ist. Dabei sei aber der triviale Fall, wo der quadratische Komplex (oder einer der möglichen quadratischen Komplexe) zerfällt, ausgeschlossen. Wenn man nun mit (67) die Gln. (17), sowie $(13)_7$ und $(13)_8$ diskutiert, zeigt sich, daß sich stets Sonderfälle der vorigen Nummer ergeben: Entweder sind zwei gegenüberliegende Flächen der T-Figur Teile derselben F_2 (Quadrik oder Kegel), und eine der anderen Brennflächen oder beide entarten in Kurven. Oder aber es entarten zwei gegenüberliegende Flächen in denselben Kegelschnitt, die beiden restlichen sind Flächen oder auch Kurven, der Komplex besteht aus den Treffgeraden dieses Kegelschnitts.

Literatur

[1] Barner, M.: Kinematische Fragen in der Projektivgeometrie der Regelflächen. Mh. Math. Phys. **59** (1956). — [2] Bol, G.: Projektive Differentialgeometrie. 2 Bde. Göttingen 1950 u. 1954. Bd. 3 in Vorbereitung. — [3] Bol, G.: Alternierende Formen und halbinvariante Differentiation. Math. Z. **54**, 141—159 (1951). — [4] Calapso, R.: Sur la configuration (T) de Finikoff et sur les éléments projectifs qui s'y rattachent. C. R. Acad. Sci. URSS. **1935** (II), 441—446. — Rec. math. Moscou **42**, 451—460 (1935). — Sur la configuration (T) de M. Finikoff à caractéristique — 1. Rec. math. Moscou **42**, 461—464 (1935). — [5] Finikoff, S.: La transformation T des congruences de droites. Rend. Accad. L. Roma (6) **14**, 421—427 (1931). — Transformation T des congruences de droites. Annali Pisa (2) **2**, 59—88 (1933). — [6] Gambier, B.: Surfaces dont les asymptotiques de l'un ou l'autre système appartiennent à des complexes linéaires. I. II. C. R. Acad. Sci. Paris **203**, 700—702, 971—973 (1936). — [7] Su, B.: On certain configurations (T) of Finikoff and the transformations of Calapso. I. J. Chinese Math. Soc. **1**, 174—206 (1936). II. J. Chinese Math. Soc. **2**, 61—83 (1937). — [8] Su, B.: On the surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes. I. Tohoku **40**, 408—420 (1935). II. Tohoku **40**, 433—448 (1935). III. Tohoku **41**, 1—19 (1935). IV. Tohoku **41**, 203—215 (1935). V. Rep. Tohoku Univ. **24**, 601—633 (1936). VI. Rep. Tohoku Univ. **24**, 634—642 (1936).

Freiburg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 5. September 1955.)

McMinn, T. J.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 286—297 (1956)

On figures of equilibrium of rotating liquids

By
TREVOR J. McMINN

1. Summary. Suppose we have a liquid of uniform density rotating in space under the influence of its own Newtonian gravitational forces. Calling the direction of the axis of rotation vertical, we suppose that the liquid fills a bounded open set with vertical convexity and a horizontal equatorial, plane of symmetry. In Theorem 3.2 below we fix finite bounds for the radius of curvature at equatorial points of curves cut by vertical planes from a surface on which the sum of the gravitational and centrifugal potential is constant. In particular, these bounds apply when the surface is the boundary of a figure of equilibrium of a uniformly rotating liquid.

In Theorems 3.5, 3.6, 3.7. and 3.8 we modify a technique introduced by L. Lichtenstein [*1*] pp. 12–15 to fix another bound for the radius of curvature at certain points on the equator of curves cut by vertical planes from the bounding surfaces of members of fairly general classes of equilibrium figures. This bound is the width of the figure in the direction parallel to both the plane of the curve and the equatorial plane. For a figure with a vertical plane of symmetry perpendicular to the plane of the curve which is convex in the direction perpendicular to the vertically symmetric plane, the bound for all points of the equator is one-half the width in the direction perpendicular to the vertical plane of symmetry (Theorems 3.9 and 3.10).

An immediate consequence of Theorem 3.2 is a stronger result than that due to L. Lichtenstein [*1*] pp. 20–21 and [*2*]. Our result, Theorem 3.3, is that, if a curve of the kind mentioned in the first paragraph is smooth at a point on the equator, then the weight force (vector sum of the gravitational and centrifugal forces) is different from zero at this point and hence the surface of constant weight force potential is smooth in the neighborhood of this point.

The question of the oblateness of an equilibrium figure has been treated by W. Nikliborc [*3*], [*4*], [*5*], [*6*]. His best upper bound for the oblateness (defined by him somewhat differently than by us) is $\sqrt{20}$. We employ Theorem 3.5 to prove Theorems 4.4 and 4.6 which state that for members of fairly general classes of figures, the oblateness with respect to a particular direction perpendicular to the axis of rotation (the ratio of the width in the direction of the axis of rotation to the width in the particular direction) is less than 2. For somewhat less general classes, we prove in Theorems 4.5 and 4.7 that it is less than or equal to $\sqrt{3}$. For a figure which is convex in the direction perpendicular to a vertical plane of symmetry, we prove in Theorem 4.8 that the oblateness with respect to this direction is less than or equal to one.

2. Preliminary Agreements. We assume a rectangular system of coordinates x, y, z and agree that the z-axis is vertical and the xy-plane is the equatorial plane E.

We let R_ϑ be a transformation that rotates the liquid through an angle ϑ about the z-axis.

We let M be the set of points with non-negative z-coordinates.

We assume we have a perfect liquid of constant density ϱ occupying a bounded open set T in three-space.

Let S be the boundary of T, v the volume of T, d the diameter of T, b one-half the vertical width of T, w_ϑ the width of $R_\vartheta(T)$ in the x-direction, u_ϑ the inf of the x-coordinates of points in $R_\vartheta(T)$, c the sup of the volumes of right cylindrical figures with vertical elements contained in T, Δ the intersection of T with the xy-plane, L the boundary of Δ, and d' the horizontal diameter of Δ.

We assume the gravitational constant is one and let $V(x, y, z)$ be the Newtonian potential at (x, y, z) due to the liquid in T. Thus

$$V(x, y, z) = \iiint_T \varrho\, \delta(x', y', z', x, y, z)^{-1}\, dx'\, dy'\, dz'$$

where $\delta(x', y', z', x, y, z)$ is the distance between (x, y, z) and (x', y', z'). We let $U(x, y, z) = V(x, y, z) + (\omega^2/2)\,(x^2 + y^2)$, where ω is the uniform angular velocity of rotation. Thus U is the weight force potential. First partical derivatives of V and U give components of the gravitational and weight force respectively.

3. Curvature. Probably due to E. Schmidt [7] is the following elementary result, a proof of which we adumbrate.

3.1. Lemma. *The absolute value of the component of the gravitational force normal to a plane tangent to S at the point of tangency is less than or equal to* $\varrho\,(1.92\pi^2 v)^{\frac{1}{3}}$.

For a given volume the normal component of the force is maximized by the liquid enclosed by a surface having the property that the contribution to the normal component at the point of tangency due to a unit point mass on the surface is the same for all points of the surface, the appropriate surface being chosen to enclose a figure with the given volume.

3.2. Theorem. *If*

(i) *T is vertically convex and symmetric about the xy-plane,*

(ii) *S' is a surface of constant U,*

(iii) *P is a vertical plane intersecting S' not tangent to S',*

(iv) *r is the radius of curvature of $P \cap S'$ at a point (a, k, o) of $P \cap S' \cap E$,*

(v) *F is the absolute value of the weight force in the direction parallel to P and E at (a, k, o),*

(vi) *l is the sup of distances from (a, k, o) to points of T, then*

$$r \leq F\, l^3 (\varrho\, c)^{-1} < \left[\varrho\,(1.92\pi^2 v)^{\frac{1}{3}} + \omega^2 |a|\right] l^3 (\varrho\, c)^{-1}.$$

PROOF. We may assume without loss of generality that P is parallel to the xz-plane. It is easily shown (see [1], p. 19) that the vertical component of the weight force is different from zero outside of E. Hence there is a continuous function g whose graph is $S' \cap M$. Let $g(t, k) > 0$ and let Q_t be the plane with equation $z = g(t, k)$. Let $0 < \zeta < b$ and let h_t be the function whose graph is that part of the image of S about Q_t which lies below the plane $z = -\zeta$. Let A_t be the domain of h_t and B_t the area of A_t. Let F_t and H_t be the x and z-components respectively of the weight force at $g(t, k)$. Let λ_t be the x-component of the intersection of the xy-plane with the normal to S' at $\big(t, k, g(t, k)\big)$. Finally, let l_t be the sup of distances from $\big(t, k, g(t, k)\big)$ to points of T.

If we take note of the convexity and symmetry of T, then we observe that the part of T lying above the graph of h_t does not contribute to H_t and hence that

$$|H_t| > \iint_{A_t} \int_{h_t(x,y)-2g(t,k)}^{h_t(x,y)} \varrho\big(g(t,k)-z\big)\big[(x-t)^2+(y-k)^2+\big(z-g(t,k)\big)^2\big]^{-\frac{3}{2}}\, dz\, dy\, dx >$$

$$> \iint_{A_t} \int_{h_t(x,y)-2g(t,k)}^{h_t(x,y)} \varrho\big(g(t,k)+\zeta\big)\, l_t^{-3}\, dz\, dy\, dx >$$

$$> 2\varrho\, B_t\, g(t,k)\,\big(g(t,k)+\zeta\big)\, l_t^{-3} > 0.$$

Since the force is normal to S', it is clear that

$$|a-\lambda_t|/g(t,k) = |F_t|/|H_t|$$

and hence that

$$|a-\lambda_t| = \big|\big(F_t\, g(t,k)\big)/H_t\big| \leq$$

$$\leq |F_t\, g(t,k)|/\big(2\varrho\, B_t\, g(t,k)\,(g(t,k)+\zeta)\, l_t^{-3}\big)$$

$$= |F_t|/\big(2\varrho\, B_t (g(t,k)+\zeta)\, l_t^{-3}\big).$$

Allowing (t, k, o) to approach (a, k, o) through points of $P \cap \Delta$ we get

$$r = \lim_{t \to a} |a-\lambda_t| \leq F/(2\varrho\, B_a\, \zeta\, l^{-3}).$$

Now since $2B_a\zeta \leq c$, we use Lemma 3.1 to conclude that

$$r \leq F\, l^3 (\varrho\, c)^{-1} < \big[\varrho\,(1.92\,\pi^2 v)^{\frac{1}{3}} + \omega^2 |a|\big]\, l^3 (\varrho\, c)^{-1}.$$

3.3. THEOREM. *If* (i) *through* (vi) *of Theorem* 3.2 *and* $P \cap S'$ *is smooth at* (a, k, o), *then* $F > 0$ *and* S' *is smooth at* (a, k, o).

PROOF. If $P \cap S'$ is smooth at (a, k, o), then by 3.2, $0 < r < \infty$ and $F > 0$. Since $F > 0$, S' is the graph of some function possessing continuous partial derivatives in the neighborhood of (a, k, o). Hence S' is smooth at (a, k, o).

3.4. REMARKS. We shall henceforth assume that $\omega > 0$ and that our liquid is in relative equilibrium, that is, that U assumes a constant value on the surface of each component of T. The surface value of U may, however, vary from component to component.

It is proved in [1], pp. 12–15, that the center of mass of T lies on the z-axis, the axis of rotation, and in a plane of symmetry of T perpendicular to the axis of rotation. We shall assume without loss of generality that this plane of symmetry, the equatorial plane, is the xy-plane. It is also proved there that T is vertically convex. Thus $S \cup M$ is the graph of a function g defined on $\Delta \cup L$. It is further proved in [1], p. 12, that g has derivatives of all orders in Δ, in fact, B. Friedman [8] has proved that g is analytic.

We are now justified in applying the results of 3.3 to surfaces of constant weight force potential of a figure of equilibrium, in particular to the bounding surface of such a figure.

Applying the Poincaré upper bound $2\pi\varrho$ for ω^2 [9], or assuming conditions which permit us to apply the upper bound $\pi\varrho$ of Crudeli and Nikliborc [10] and [11] or [1], p. 20, we get for the r of 3.2 the purely geometric bounds

$$\left[(1.92\pi^2 v)^{\frac{1}{3}} + 2\pi\,|a|\right] l^3 c^{-1},$$
$$\left[(1.92\pi^2 v)^{\frac{1}{3}} + \pi\,|a|\right] l^3 c^{-1}.$$

respectively.

Let α_ϑ be the inf of the x-coordinates of the points of intersection of the xy-plane with normals to S, not lying in the xy-plane, at points with positive x-coordinates.

Let β_ϑ be the inf of the x-coordinates of the points of intersection of the xy-plane with normals to S, not lying in the xy-plane, at points with negative x-coordinates.

3.5. Theorem. *If* $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$, *then* $\mu_\vartheta \leqq \alpha_\vartheta$.

Proof. There is no loss of generality in taking ϑ to be zero.

We shall assume the negation of the theorem and arrive at a contradiction, namely, that the weight force potential is not constant on some component of S. Thus we assume $\alpha_0 < \mu_0$.

Since the vertical component of the weight force is not zero above the xy-plane, there is no point except possibly in E where a tangent to S can be vertical. This fact and 3.3 assure us that $-\infty < \alpha_0 < \beta_0 < \infty$. Now let h be such that $\alpha_0 < h < \mu_0$ and $h < (\alpha_0 + \beta_0)/2$. Let J be the line in the xy-plane parallel to the y-axis passing through (h, o, o). Let y, r, φ be cylindrical coordinates of a point at a distance r from J such that the plane through the point and through J makes an angle φ with the yz-plane, such that $\pi/2 \leqq \varphi < \pi$ for first octant points. Let $\delta(y, r, \varphi, p)$ be the distance between a point with cylindrical coordinates y, r, φ and a point p. Let K be the set of mid points of open arcs formed by the intersection of T with circles concentric to J lying in planes perpendicular to J. Let K' be the closure of K.

Let p_0 be a point of K' with maximum φ-coordinate. Let the cylindrical coordinates of p_0 be y_0, r_0, φ_0. Since $\alpha_0 < h < u_0$ it is clear that $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$.

Let Δ' and Δ'' be the cylindrical projections of T and Δ respectively on the half plane with cylindrical equation $\varphi = 0$. Let $\xi(y, r)$ and $\eta(y, r)$ be finite or possibly infinite sequences of φ coordinates of upper and lower end

points respectively of open circular arcs formed by the intersection of T with a circle of radius r in a plane perpendicular to J having its center at (h, y, o).

We now break the proof into two cases according to whether p_0 is or is not in S.

CASE 1. *p_0 is in S.* Let F be the component of the gravitational force at p_0 in direction of the line tangent to S at p_0 lying in the plane $y = y_0$. Let F be positive in the direction opposite to the direction in which φ is measured. Let $\cos(y, r, \varphi)$ be the cosine of the angle from the vector at p_0 representing F and the line from p_0 to the point with cylindrical coordinates y, r, φ. It is easy to see that if $0 < \varphi_0 - (\varphi' + \varphi'')/2$ and $\varphi' < \varphi''$, then

$$0 < \int_{\varphi'}^{\varphi''} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi .$$

Hence for points in Δ' with cylindrical coordinates y, r, o

$$0 \leq \sum_i \int_{\eta(y,r)_i}^{\xi(y,r)_i} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi .$$

Since $\Delta'' \subset \Delta'$, Δ'' is a set of positive two dimensional measure, and the preceding inequality is strict for points in Δ'', we see that

$$0 < \iint_{\Delta'} \sum_i \int_{\eta(y,r)_i}^{\xi(y,r)_i} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi\, dr\, dy = F .$$

Since the normal to S at p_0 intersects J, $h < \beta_0$ and $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$ it is clear that the x-coordinate of p_0 is positive and hence the component of the centrifugal force in the direction of F is also positive. Thus there is a non-zero component of the weight force tangent to S. But this contradicts the condition that the weight force is normal to S, that is, that the boundary o each component of T is a surface of constant weight force potential.

CASE 2. *p_0 is not in S.* There are points p_1 and p_2 on the boundary of the same component of T with cylindrical coordinates y_0, r_0, φ_1 and y_0, r_0, φ_2, respectively such that $\varphi_1 < \varphi_2$, $\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ and there is no point of S with cylindrical coordinates y_0, r_0, φ' for which $\varphi_1 < \varphi' < \varphi_2$. Let V_1 and U_1 be the gravitational and weight force potentials respectively at p_1. Let V_2 and U_2 be corresponding quantities at p_2.

It is easy to see that if

$$|\varphi_1 - (\varphi' + \varphi'')/2| < |\varphi_2 - (\varphi' + \varphi'')/2| ,$$

then

$$0 < \int_{\varphi'}^{\varphi''} \varrho\, [\delta(y, r, \varphi, p_1)^{-1} - \delta(y, r, \varphi, p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi .$$

Hence for points (y, r, o) in Δ'

$$0 \leq \sum_i \int_{\eta(y,r)_i}^{\xi(y,r)_i} \varrho\, [\delta(y, r, \varphi, p_1)^{-1} - \delta(y, r, \varphi, p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi .$$

Since $\Delta'' \subset \Delta'$, Δ'' is a set of positive two dimensional measure, and the preceding inequality is strict for (y, r, o) in Δ'', we see that

$$0 < \iint_{\Delta'} \sum_i \int_{\eta(y,r)_i}^{\xi(y,r)_i} \varrho \left[\delta(y, r, \varphi, p_1)^{-1} - \delta(y, r, \varphi, p_2)^{-1}\right] r \, d\varphi \, dr \, dy = V_1 - V_2.$$

If we can show that the square of the x-coordinate of p_1 is greater than or equal to the square of the x-coordinate of p_2, then we will have $0 < U_1 - U_2$ in contradiction to the condition that the boundary of each component of T is a surface of constant weight force potential.

We now proceed to show this. Let x_1, y_1, z_1 and x_2, y_1, z_2 be the rectangular coordinates of p_1 and p_2 respectively. If $0 \leq x_2$, then since $x_2 < x_1$, clearly $x_2^2 < x_1^2$. If $x_2 < 0$, then consider the three circular cylindrical surfaces

$$C_1: \quad (x - h)^2 + z^2 = r_0^2 = h^2 + n^2,$$
$$C_2: \quad (x - \alpha_0)^2 + z^2 = \alpha_0^2 + m^2,$$
$$C_3: \quad (x - \beta_0)^2 + z^2 = \beta_0^2 + m^2,$$

where m is so chosen that (x_2, y_1, z_2) lies in C_3. Let γ be that part of the intersection of S with the plane $y = y_0$ which lies outside C_1, and inside the sector between φ_1 and φ_2. Because of the nature of α_0 and β_0, it is not difficult to see that γ cannot lie inside both C_2 and C_3. Hence, letting x_0 be the x-coordinate of the intersection of C_1, and C_2, we have $x_0 < x_1$. Expressing the fact that (x_2, y_1, z_2) lies on C_1 and C_3 and that x_0 is the x-coordinate of a point on C_1 and C_2 we get

$$x_2 = (n^2 - m^2)/\left(2(\beta_0 - h)\right),$$
$$x_0 = (n^2 - m^2)/\left(2(\alpha_0 - h)\right).$$

Now since $x_2 < 0$ and $h < \beta_0$, we have $n^2 < m^2$. Furthermore, since

$$\alpha_0 < h < (\alpha_0 + \beta_0)/2,$$

we have

$$|x_2| < x_0 < x_1.$$

Hence, finally, $x_2^2 < x_1^2$.

The proof is complete.

3.6. THEOREM. *If for each plane P perpendicular to the y-axis, $P \cap R_\vartheta(S) \cap M$ is non-decreasing from an equatorial point with negative x-coordinate to the yz-plane, then $u_\vartheta \leq \alpha_\vartheta$.*

PROOF. Suppose the contrary. Then since $u_\vartheta \leq \beta_\vartheta$ we have $\alpha_\vartheta < u_\vartheta \leq \beta_\vartheta$. Hence by 3.5, $u_\vartheta \leq \alpha_\vartheta$. Contradiction.

3.7. THEOREM. *If $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$, P is a vertical plane intersecting $R_\vartheta(T)$ and r is the radius of curvature at a point of $P \cap R_\vartheta(S) \cap E$ with positive x-coordinate of $P \cap R_\vartheta(S)$, then $r \leq w_\vartheta$.*

PROOF. Apply 3.5.

3.8. THEOREM. *If for each plane P perpendicular to the y-axis $P\cap R_\vartheta(S)\cap M$ is non-decreasing from an equatorial point with negative x-coordinate to the yz-plane, then for each plane P perpendicular to the y-axis the radius of curvature of $P\cap R_\vartheta(S)$ at a point of $P\cap R_\vartheta(S)\cap E$ with positive x-coordinate is less than or equal to w_ϑ.*

PROOF. Apply 3.6.

3.9. THEOREM. *If $R_\vartheta(T)$ is symmetric about the yz-plane and convex in the x-direction, then $0\leq\alpha_\vartheta$.*

PROOF. As in 3.5 we shall take ϑ to be zero and assume the negation of the theorem. We will then arrive at the contradiction that the boundary of some component of T is not a surface of constant weight force potential. We thus assume $\alpha_0<0$.

Let $h<0$ and let J_h be the line parallel to the y-axis passing through (h, o, o). Let y, r, φ be cylindrical coordinates of a point at a distance r from J_h such that the plane through the point and through J_h makes an angle φ with the yz-plane, such that $\pi/2\leq\varphi<\pi$ for first octant points. Let $\delta(y, r, \varphi, p)$ be as in 3.5. Let W be the set of points with cylindrical coordinates y, r, φ in T such that there are two points in S with cylindrical coordinates y, r, φ' and y, r, φ'' respectively for which $0\leq\varphi'<\varphi<\varphi''$, $\varphi'<\pi$, and there is no point in S with cylindrical coordinates y, r, φ''' with $\varphi'<\varphi'''<\varphi''$. Let W' be the set of points in $T-W$ with x-coordinates greater than h, W'' be the set of points in T with x-coordinates less than h, and W''' be the image of W' about the plane $x=h$. Let q_h be the sup of the lengths of line segments formed by intersecting W with lines parallel to the x-axis.

Since circles concentric and perpendicular to the line J_{α_0} intersect T in circles or in pairs of open circular arcs with mid points in the xy-plane, it is possible to choose h so that $\alpha_0<h<0$ and $0<q_h<-h$. Since $q_h<-h$ and since T is symmetric about the yz-plane and convex in the x-direction, it is clear that W''' contains W''. It is also clear that W, W' and W'' are mutually disjointed sets whose union is T.

Let K be the set of midpoints of open arcs, each arc having the property that the x-coordinate of the endpoint with the smaller φ-coordinate is positive and it is formed by the intersection of T with a circle concentric and perpendicular to J_h. Let K' be the closure of K. Let p_0 be the point of K' with the maximum φ-coordinate. Let the cylindrical coordinates of p_0 be y_0, r_0, φ_0. Since $\alpha_0<h<0$, T is convex in the x-direction and symmetric about the yz-plane, it can be checked that $\pi/2<\varphi_0<\pi$.

We now break the proof into two cases according to whether p_0 is or is not in S.

CASE 1. *p_0 is in S.* Since T is symmetric about the yz-plane and convex in the x-direction and $h<0$, it is easy to see that the x-coordinate of p_0 is non-negative. Indeed, since S is smooth above the xy-plane, the x-coordinate of p_0 is positive.

Let F be the component of the gravitational force at p_0 in the direction of the line tangent to S at p_0 lying in the plane $y = y_0$. Let F be positive in the direction opposite to the direction in which φ is measured. Let $\cos(y, r, \varphi)$ be the cosine of the angle from the vector at p_0 representing F and the line from p_0 to the point with cylindrical coordinates y, r, φ.

It can be checked that if

$$0 < \varphi' < \pi/2, \quad 0 < \varphi'' \leq \pi/2, \quad \varphi' < \varphi'', \quad 0 < r,$$
$$\pi \leq t \leq 2\pi - \varphi_0, \quad \varphi_0 - \pi/2 < s \leq \pi/2,$$

then

$$0 < \delta(y, r, \pi - t, p_0)^{-2} < \delta(y, r, t, p_0)^{-2},$$
$$-\cos(y, r, \pi - t) < \cos(y, r, t),$$
$$0 < \delta(y, r, \pi + s, p_0)^{-2} < \delta(y, r, s, p_0)^{-2},$$
$$\cos(y, r, \pi + s) < -\cos(y, r, s)$$

and hence that

$$(1) \quad \begin{cases} 0 > \int\limits_{\pi+\varphi'}^{\pi+\varphi''} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi + \\ + \int\limits_{2\pi-\varphi''}^{2\pi-\varphi'} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 0 < \int\limits_{\varphi'}^{\pi-\varphi'} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi + \\ + \int\limits_{\pi+\varphi'}^{2\pi-\varphi'} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi. \end{cases}$$

We can now use (1) to show that

$$\iiint\limits_{W'''} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi\, dr\, dy <$$
$$< \iiint\limits_{W''} \varrho\, \delta(y, r, \varphi, p_0)^{-2} \cos(y, r, \varphi)\, r\, d\varphi\, dr\, dy$$

and use (2) to show that

$$0 < \iiint\limits_{W'''} + \iiint\limits_{W'}$$

and hence that

$$0 < \iiint\limits_{W''} + \iiint\limits_{W'}.$$

The preceeding inequalities are strict because the cylindrical projection of W' on the half plane with cylindrical equation $\varphi = 0$ is a set of positive two dimensional measure. Finally, we may check that $0 \leq \iiint\limits_{W}$ and hence that

$$0 < \iiint\limits_{W''} + \iiint\limits_{W'} + \iiint\limits_{W'} = F.$$

Since the x-coordinate of p_0 is positive, the component of the centrifugal force in the direction of F is also positive.

A contradiction has now been arrived at, namely, that there is a non-zero component of the weight force tangent to S.

CASE 2. *p_0 is not in S.* There are points p_1 and p_2 on the boundary of the same component of T with cylindrical coordinates y_0, r_0, φ_1 and y_0, r_0, φ_2 respectively such that $\varphi_1 < \varphi_2$, $\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ and there is no point in S with cylindrical coordinates y_0, r_0, φ' for which $\varphi_1 < \varphi' < \varphi_2$. Let V_1 and U_1 be the gravitational and weight force potentials respectively at p_1. Let V_2 and U_2 be corresponding quantities at p_2.

Somewhat as in CASE 1, we can show that if $0 < \varphi' < \pi/2$, $0 < \varphi'' \leq \pi/2$, $\varphi' < \varphi''$ and $0 < r$, then

$$(3) \qquad \begin{cases} 0 > \int\limits_{\pi+\varphi'}^{\pi-\varphi''} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi + \\ \quad + \int\limits_{2\pi-\varphi''}^{2\pi-\varphi'} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi, \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} 0 < \int\limits_{\varphi'}^{\pi-\varphi'} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi + \\ \quad + \int\limits_{\pi+\varphi'}^{2\pi-\varphi'} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi. \end{cases}$$

We can now use (3) to show that

$$\iiint\limits_{W'''} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi\, dr\, dy <$$
$$< \iiint\limits_{W''} \varrho\,[\delta(y,r,\varphi,p_1)^{-1} - \delta(y,r,\varphi,p_2)^{-1}]\, r\, d\varphi\, dr\, dy$$

and use (4) to show that

$$0 < \iiint\limits_{W''''} + \iiint\limits_{W'}$$

and hence that

$$0 < \iiint\limits_{W''} + \iiint\limits_{W'}.$$

The preceding inequalities are strict for the same reason given in CASE 1. We have finally $0 \leq \iiint\limits_{W}$ and hence

$$0 < \iiint\limits_{W''} + \iiint\limits_{W'} + \iiint\limits_{W} = V_1 - V_2.$$

Since the x-coordinate of p_1 is greater than the absolute value of the x-coordinate of p_2, the centrifugal potential at p_1 is greater than at p_2. Hence $0 < U_1 - U$, in contradiction to the condition that the boundary of each component of T is a surface of constant weight force potential.

The proof is complete.

3.10. THEOREM. *If $R_\vartheta(T)$ is symmetric about the yz-plane and convex in the x-direction, P is a plane perpendicular to the y-axis intersecting $R_\vartheta(T)$, and r is the radius of curvature of $P \cap R_\vartheta(S)$ at a point of $P \cap R_\vartheta(S) \cap E$, then $r \leq w_\vartheta/2$.*

PROOF. Apply 3.9.

4. Oblateness.

4.1. Lemma. *If* $0 \leq f(x) < \infty$ *for* $0 \leq x \leq a$, $f(0) = h$, $f(a) = 0$, *and* f *is differentiable for* $0 < x < a$ *and* $0 < f(x)$, *then*

$$\inf_{0<x<a} f(x)\, f'(x) + x \leq (a^2 - h^2)/(2a).$$

Proof. $f(x)\, f'(x) + x$ is the x-coordinate of the point of intersection of the x-axis with the normal to the graph of f at the point $(x, f(x))$. Consider now the function whose graph is the arc of the circle with center on the x-axis passing through (o, h) and (a, o). The x-coordinate of the center is $(a^2 - h^2)/2a$.

It can be easily checked that if the graph of f does not coincide with this arc between o and a, then there is an x' for which

$$f(x')\, f'(x') + x' < (a^2 - h^2)/(2a).$$

4.2. Theorem. *If* $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$, (p, q, h) *is in* $R_\vartheta(S)$, (a, q, o) *is in* $R_\vartheta(S)$, $0 < h$, *and* $\alpha_\vartheta \leq p < a$ *then*

(i) $u_{\vartheta+\pi} \geq a \geq \left(h^2 + (p - u)^2\right)^{\frac{1}{2}} + u_\vartheta$,

(ii) $0 \leq p$ *implies*

$$u_{\vartheta+\pi} \geq a > (h^2 + w_\vartheta^2)^{\frac{1}{2}} - w_\vartheta \geq (h^2 + d'^2)^{\frac{1}{2}} - d'.$$

Proof. Obviously $u_{\vartheta+\pi} \geq a$ and $p - u_\vartheta < w_\vartheta \leq d'$. By 3.5, $u_\vartheta \leq \alpha_\vartheta$.

Letting $f(x) = g(x, q)$ for (x, q, o) in Δ and $f(x) = 0$ for (x, q, o) not in Δ, we have by 4.1

$$u_\vartheta - p \leq \alpha_\vartheta - p \leq \left((a - p)^2 - h^2\right)/\left(2(a - p)\right).$$

Consequently,

$$2(a - p)(u_\vartheta - p) \leq \left((a - p)^2 - h^2\right),$$

$$(a - p)^2 + 2(a - p)(p - u_\vartheta) + (p - u_\vartheta)^2 \geq h^2 + (p - u_\vartheta)^2,$$

$$(a - u_\vartheta) \geq \left(h^2 + (p - u_\vartheta)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Thus

$$u_{\vartheta+\pi} \geq a \geq \left(h^2 + (p - u)^2\right) + u_\vartheta.$$

Also $0 \leq p$ implies

$$u_{\vartheta+\pi} \geq a \geq \left(h^2 + (p - u_\vartheta)^2\right)^{\frac{1}{2}} + u_\vartheta - p > (h^2 + w_\vartheta^2)^{\frac{1}{2}} - w_\vartheta$$
$$\geq (h^2 + d'^2)^{\frac{1}{2}} - d'.$$

4.3. Theorem. *If* $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$, (p, q, b) *is in* $R_\vartheta(S)$ (a, q, o) *is in* $R_\vartheta(S)$, *then*

(i) $u_{\vartheta+\pi} \geq a \geq \left(b^2 + (p - u_\vartheta)^2\right)^{\frac{1}{2}} + u_\vartheta$,

(ii) $0 \leq p$ *implies*

$$u_{\vartheta+\pi} \geq a \geq (b^2 + w_\vartheta^2)^{\frac{1}{2}} - w_\vartheta \geq (b^2 + d'^2)^{\frac{1}{2}} - d'.$$

Proof. Since (p, q, b) is a point of $R_\vartheta(S)$ with maximum z-coordinate, $\alpha_\vartheta \leq p$. Obviously $0 < b$ and $p < a$. Hence the conclusion follows immediately from 4.2.

4.4. THEOREM. *If* $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$ *then* $(2b)/w_\vartheta < 2$.

PROOF. From 4.3, (i) we get

$$w_\vartheta \geq a - u_\vartheta \geq \left(b^2 + (p - u_\vartheta)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$w_\vartheta^2 \geq b^2 + (p - u_\vartheta)^2,$$
$$\left(w_\vartheta^2 - (p - u_\vartheta)^2\right)/w_\vartheta^2 \geq b^2/w_\vartheta^2,$$
$$2\left(1 - (p - u_\vartheta)^2/w_\vartheta^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq (2b)/w_\vartheta.$$

Since $0 < p - u_\vartheta < w_\vartheta$ we get

$$2 > (2b)/w_\vartheta.$$

4.5. THEOREM. *If* $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$ *and* $\alpha_{\vartheta+\pi} < \beta_{\vartheta+\pi}$, *then* $(2b)/w_\vartheta \leq \sqrt{3}$.

PROOF. From 4.3 (i) we get

$$2\left(1 - (p - u_\vartheta \quad)^2/w_\vartheta^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq (2b)/w_\vartheta,$$
$$2\left(1 - (p - u_{\vartheta+\pi})^2/w_\vartheta^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq (2b)/w_\vartheta.$$

Since $p - u_\vartheta \geq w_\vartheta/2$ or $p - u_{\vartheta+\pi} \geq w_\vartheta/2$, we have

$$\sqrt{3} \geq (2b)/w_\vartheta.$$

4.6. THEOREM. *If for each plane* P *perpendicular to the* y*-axis* $P \cap R_\vartheta(S) \cap M$ *is non-decreasing from an equatorial point with negative* x*-coordinate to the* yz*-plane then* $(2b)/w_\vartheta < 2$.

PROOF. Suppose $(2b)/w_\vartheta \geq 2$. Then it is easy to see that $\alpha_\vartheta < u_\vartheta$. But the nature of S for points with negative x-coordinates assures us that $u_\vartheta \leq \beta_\vartheta$. Hence $\alpha_\vartheta < \beta_\vartheta$. But 4.4 tells us that $(2b)/w_\vartheta < 2$, in contradiction to our supposition.

4.7. THEOREM. *If* $R_\vartheta(T)$ *is convex in the* x*-direction, if for each plane* P *perpendicular to the* y*-axis intersecting* $R_\vartheta(T)$, $P \cap R_\vartheta(T) \cap M$ *has a point of maximum* z*-coordinate in the* yz*-plane, and if* $-u_\vartheta = u_{\vartheta+\pi}$, *then* $(2b)/w_\vartheta \leq \sqrt{3}$.

PROOF. Suppose $(2b)/w_\vartheta > \sqrt{3}$. Then there is a point of $R_\vartheta(S)$ which is outside both of the cylindrical surfaces C_1 and C_2 described as follows: Let C_1 be the circular cylindrical surface with radius w_ϑ concentric to the line through (u_ϑ, o, o) parallel to the y-axis and C_2 the circular cylindrical surface of radius w_ϑ concentric to the line through $(u_{\vartheta+\pi}, o, o)$ parallel to the y-axis. Hence $\alpha_\vartheta < u_\vartheta \leq \beta_\vartheta$ and $\alpha_{\vartheta+\pi} < u_{\vartheta+\pi} \leq \beta_{\vartheta+\pi}$. But 4.5 tells us that $(2b)/w_\vartheta \leq \sqrt{3}$ which contradicts our supposition.

4.8. THEOREM. *If* T *is symmetric about the* yz*-plane and convex in the* x*-direction, then* $(2b)/w_\vartheta \leq 1$.

PROOF. Since by 3.9, $0 \leq \alpha_\vartheta$ it is clear that T is contained in the circular cylindrical surface with radius $w_\vartheta/2$ concentric to the y-axis. Hence $(2b)/w_\vartheta \leq 1$.

4.9. REMARKS. Because of the fact that the oblateness of a sphere (the figure of equilibrium of a non-rotating liquid) is one, a better bound holding

for all angular velocities cannot be found. However, there is much room for improvement. First it seems natural to conjecture that the unit bound still holds when all geometric restrictions are removed and furthermore is only attained for $\omega = 0$. Beyond this it would be desirable to obtain the best bounds for each angular velocity with or without planes of symmetry or other particular characteristics.

It might be pertinent here to raise the question of whether or not every figure of equilibrium having the same weight force potential on each component surface has at least one plane of symmetry containing the axis of rotation. Every known figure of equilibrium with the same weight force potential on each component surface does have such a plane of symmetry. E. Hölder [12], has exhibited a configuration with three components having no such plane of symmetry, but having a different surface weight force potential on each component.

References

[1] Lichtenstein, L.: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin 1933. — [2] Lichtenstein, L.: Über eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktion. Math. Z. **11**, 319—320 (1921). — [3] Nikliborc, W.: Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten. Math. Z. **34**, 74—90 (1931). — [4] Nikliborc, W.: Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten. II. Math. Z. **36**, 655—676 (1933). — [5] Nikliborc, W.: Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten. III. Studia Math. **5**, 111—126 (1934). — [6] Nikliborc, W.: Ein Satz über die Winkegeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten. Math. Z. **31**, 366—377 (1929). — [7] Schmidt, E.: Bemerkungen zur Potentialtheorie, S. 365—383, besonders S. 368. Schwarz-Festschrift. Berlin 1914. — [8] Friedman, B.: Analyticity of equilibrium figures of rotation. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 183—198 (1938). — [9] Poincaré, H.: Figures d'equilibre d'une masse fluide, pp. 27—28. Paris 1902. — [10] Crudeli, U.: Nuovo limite superiore delle velocita angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformenente, limitari da figura di equilibrio. Atti Lincei **19**, 666—668 (1910). — [11] Nikliborc, W.: Über die obere Schranke der Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeiten. Math. Z. **30**, 787—793 (1929). — [12] Hölder, E.: Mathematische Untersuchung zur Himmelsmechanik. Math. Z. **31**, 197—257 (1929), besonders S. 219—225.

Dept. of Math., University of California, Berkeley 4, Cal. (U.S.A.).

(Eingegangen am 8. August 1955.)

Jacobs, K.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 298—338 (1956)

Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen*)

Von
Konrad Jacobs

Einleitung

In der allgemeinen Ergodentheorie untersucht man Mittelwert- und Periodizitätseigenschaften von Halbgruppen stetiger linearer Transformationen in einem topologischen Vektorraum. Es sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$ ein topologischer Vektorraum und $\mathfrak{G} = \{x, y, \ldots\}$ eine Halbgruppe von stetigen linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$. Den aus dem Vektor $h \in \mathfrak{H}$ durch Anwendung der linearen Transformation $x \in \mathfrak{G}$ entstehenden Vektor bezeichnen wir mit xh.

Die Mittelwertuntersuchungen haben den Beweis der folgenden Aussage zum Ziel:

Mittelwert-Aussage (Fixpunkt-Aussage). Zu jedem Vektor $h \in \mathfrak{H}$ gibt es in der konvexen abgeschlossenen Hülle $\mathfrak{K}(h)$ der „Bahn" $\{xh \mid x \in \mathfrak{G}\} = \mathfrak{G}h$ von h genau einen Fixpunkt, d. h. einen Vektor h_0, für welchen

$$xh_0 = h_0 \quad \text{für jedes} \quad x \in \mathfrak{G}$$

gilt. Man sagt dann: h besitzt den Fixpunkt h_0, bzw. h_0 wird *der* Fixpunkt von h genannt (vgl. Eberlein [*22*], S. 220).

Diese Aussage ist nicht allgemein richtig (vgl. das Beispiel 2 in Kapitel II, § 2). Um sie zu beweisen, muß man zusätzliche Voraussetzungen über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ machen. Beweise für die Mittelwert-Aussage (bzw. Teilaussagen, Varianten und Verschärfungen derselben) unter verschiedenen Voraussetzungen über $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ finden sich z. B. bei v. Neumann [*46*], [*47*], Hopf [*25*], Riesz [*51*], [*52*], [*53*], Wiener [*57*], G. Birkhoff [*5*], [*6*], Alaoglu-Birkhoff [*1*], Lorch [*34*], Kakutani [*29*], [*30*], Yosida-Kakutani [*58*], Dunford [*18*], [*19*], Dunford-Miller [*20*], Day [*13*], [*15*], Maak [*36*], [*37*], [*39*], [*40*], Eberlein [*22*], Bourbaki [*10*], Dixmier [*59*], Jacobs [*27*], Riesz-Nagy [*54*]; vgl. auch den Bericht von Kakutani [*31*]. — Unter den sich so ergebenden Mittelwert-, Fixpunkt- bzw. Ergodensätzen ist der folgende von besonderer Bedeutung:

Mittelwertsatz (Fixpunktsatz). *Sei $\mathfrak{H}$ ein reflexiver Banachraum* (vgl. Definition I). *Sei $\mathfrak{G}$ eine beschränkte abelsche Halbgruppe welche die*

*) Herrn Prof. Dr. W. Maak in München bin ich für viele Hinweise dankbar. Mein Dank gilt ferner der Deutschen Forschungsgemeinschaft, deren Unterstützung mir die Fertigstellung dieser Arbeit ermöglichte. Ich danke ebenso Herrn Prof. Dr. W. Süss, durch dessen Entgegenkommen mir die hervorragenden Arbeitsmöglichkeiten im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach zur Verfügung standen.

Identität e enthalten möge; es gebe also eine Zahl $\Gamma \geq 1$ *derart, daß für jedes* $h \in \mathfrak{H}$ *und jedes* $x \in \mathfrak{G}$

$$|xh| \leq \Gamma |h|$$

gilt, wobei $|h|$ *die Norm von h im Banachraum* $\mathfrak{H}$ *bedeutet. Dann ist die Mittelwert-Aussage richtig.*

Für Beweise bzw. Beweisideen vgl. u. a. Riesz [*51*], Dixmier [*59*], Lorch [*34*], Bourbaki [*10*], Eberlein [*22*], Day [*13*], [*15*], Riesz-Nagy [*54*][1]). Bei Eberlein [*22*], Dixmier [*59*] und Day [*15*] finden sich weitgehende Verallgemeinerungen.

Dieser Fixpunktsatz läßt sich auch als Aufspaltungssatz formulieren: Unter den angegebenen Voraussetzungen bilden die unter $\mathfrak{G}$ invarianten Vektoren $f \in \mathfrak{H}$ einen invarianten Teilraum $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$, ebenso bilden die Vektoren $g \in \mathfrak{H}$, welche den Fixpunkt $0 \in \mathfrak{H}$ besitzen, einen invarianten Teilraum $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$. Es gilt:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{F} + \mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N} = \{0\},$$

genauer: jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Zerlegung

$$h = f + g, \qquad f \in \mathfrak{F}, \qquad g \in \mathfrak{N}.$$

Die Komponenten f, g hängen linear, stetig und invariant von h ab.

Man kann nun als Ziel der Periodizitätsuntersuchungen der Ergodentheorie ebenfalls eine Aufspaltungsaussage aufstellen. Sie ergibt sich aus der folgenden Fragestellung. In den Theorie der fastperiodischen Funktionen auf abstrakten Gruppen spielt der Mittelwertsatz eine fundamentale Rolle; mit seiner Hilfe ist es möglich, die E. Schmidtsche Theorie der Integralgleichungen auf fastperiodische Funktionen auf beliebigen Gruppen zu übertragen und auf diese Weise einen Approximationssatz für diese Funktionen zu beweisen (vgl. v. Neumann [*47*], Maak [*36*]. Die Mittelwerttheorie für fastperiodische Funktionen ist von besonderer Eleganz und Schönheit (vgl. Maak [*36*], S. 31 ff.). Es entsteht nun die Frage: Liegt der Gültigkeit der Mittelwertsätze der Ergodentheorie ein fastperiodisches Verhalten der Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{G}$ zugrunde und lassen sich die bekannten Ergebnisse über fastperiodische Funktionen für die Ergodentheorie fruchtbar machen?

Vor kurzem konnte gezeigt werden, daß den bekannten Mittelwert-Eigenschaften beliebiger unitärer bzw. beschränkter Gruppen im Hilbertraum ein fastperiodisches Verhalten zugrunde liegt. Diese Aussage wurde als Aufspaltungssatz formuliert (Maak [*40*], Jacobs [*28*]); ein ähnlicher Satz findet sich bei Godement [*23*], S. 64; in der vorliegenden Arbeit soll die entsprechende Aussage — ebenfalls in Form eines Aufspaltungssatzes — für den dem obigen Fixpunktsatz zugrunde liegenden Fall beschränkter abelscher Halbgruppen in reflexiven Banachräumen bewiesen werden.

Zu diesem Zweck benötigt man passende Verallgemeinerungen der klassischen Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Gruppen (v. Neumann [*47*],

[1]) In Kapitel III, § 3, der vorliegenden Arbeit ist ebenfalls ein Beweis durchgeführt.

MAAK [36]). Zunächst braucht man eine Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen; diese Theorie ist von MAAK [38] entwickelt worden; der Approximationssatz für fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen läßt sich nach MAAK auf den entsprechenden Satz für Gruppen zurückführen, indem man ein geeignetes homomorphes Bild der Halbgruppe in eine Gruppe einbettet. — Ferner muß man die Theorie auf Funktionen mit Werten in einem Banachraum verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung ist durch WEYL [56], MAAK [37] und KAWADA [32] gegeben worden; danach läßt sich der Approximationssatz für vektorwertige Funktionen auf den entsprechenden Satz für numerische Funktionen zurückführen, indem man Faltungen vektorwertiger Funktionen mit numerischen Funktionen bildet. Vergleiche den Beweis von Satz IV.1.1.

Wir können nun definieren, was unter einem bezüglich $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektor $p \in \mathfrak{G}$ verstanden werden soll (Definition II.1). Man zeigt leicht: Die Gesamtheit $\mathfrak{P}$ aller fastperiodischen Vektoren $p \in \mathfrak{H}$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$. Dabei ist $\mathfrak{P}$ im allgemeinen ein echter Teilraum von $\mathfrak{H}$ (Kap. II, § 1, Beispiel 1), d. h. die Vektoren von $\mathfrak{H}$ sind nicht immer alle fastperiodisch. Wir suchen nun einen zweiten invarianten Teilraum $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$ derart, daß $\mathfrak{H}$ direkt in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ zerfällt. Zu diesem Zweck benützen wir die schwache Topologie in $\mathfrak{H}$ (Kap. I) und definieren: Ein Vektor $f \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$, wenn die schwach-abgeschlossene Hülle $\mathfrak{G}(f)$ der Bahn $\mathfrak{G}f$ den Vektor $O \in \mathfrak{H}$ enthält, d. h. wenn es in jeder schwachen Umgebung von $O \in \mathfrak{H}$ einen Vektor der Gestalt $xf\,(x \in \mathfrak{G})$ gibt (Definition II. 2; vgl. JACOBS [28]). Die Gesamtheit aller Fluchtvektoren heiße $\mathfrak{F}$.

Als Ziel der Periodizitätsuntersuchungen formulieren wir nun die

Aufspaltungsaussage. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$. Es gilt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P} + \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}.$$

Genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Darstellung

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten p, f von h hängen linear, stetig und invariant von h ab.

Diese Aussage ist nicht allgemein richtig (vgl. Kap. II, § 2, Beispiel 2). In dieser Abhandlung beweisen wir den folgenden

Aufspaltungssatz I. *Sei $\mathfrak{H}$ ein reflexiver Banachraum und sei $\mathfrak{G}$ eine beschränkte abelsche Halbgruppe in $\mathfrak{H}$. Dann ist die Aufspaltungsaussage richtig* (Satz II.2.2; vgl. den obigen Fixpunktsatz).

Der Beweis dieses Satzes wird in mehreren Schritten geführt. Zunächst wird — für eine beliebige beschränkte Halbgruppe $\mathfrak{G}$ in einem beliebigen Banachraum $\mathfrak{H}$ — der Teilraum $\mathfrak{P}$ der unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren genauer untersucht. Man kann für die Fastperiodizität eines Vektors $h \in \mathfrak{H}$ bezüglich $\mathfrak{G}$ ein Kriterium angeben, welches sich zur Definition II.1 ähnlich verhält wie die v. NEUMANNsche Formulierung des Begriffs „fastperiodische

Funktion auf einer Gruppe" (v. NEUMANN [47]; MAAK [36], S. 152 f.) zu der von MAAK gegebenen Definition (MAAK [36], S. 26): Satz II.1.4.

Mit Hilfe dieses Kriteriums kann man sich völlige Aufklärung über das Verhältnis zwischen den Begriffen „fastperiodisch" bezüglich *Halbgruppen* einerseits und bezüglich *Gruppen* andererseits verschaffen (Satz II.1.6). Man kann beweisen, daß $\mathfrak{P}$ in *endlichdimensionale* irreduzible, invariante Teilräume zerfällt (ist $\mathfrak{G}$ *abelsch*, so sind diese Teilräume *eindimensional* (MAAK [36], S. 17 f)). Es ergibt sich zugleich ein neuer Zugang zu der von MAAK entwickelten Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen (Anhang II). Das dabei verwendete Prinzip der *topologischen Einbettung einer Halbgruppe in eine Gruppe* legen wir nun dem Beweis des Aufspaltungssatzes I zugrunde.

Wir setzen von nun an den Banachraum $\mathfrak{H}$ als reflexiv und die beschränkte Halbgruppe $\mathfrak{G}$ als abelsch voraus.

Wir bilden die schwache Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ (Definition III.1). $\overline{\mathfrak{G}}$ ist wieder eine beschränkte abelsche Halbgruppe, mit derselben Schranke wie $\mathfrak{G}$ (Satz III.1.1). Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, wenn er unter $\overline{\mathfrak{G}}$ fastperiodisch ist; ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$, wenn er ein Fluchtvektor unter $\overline{\mathfrak{G}}$ ist. Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist $\overline{\mathfrak{G}}h$ eine schwach-kompakte $\overline{\mathfrak{G}}$-invariante Menge; sie ist nämlich gleich der schwachen Hülle $\mathfrak{G}(h)$ der Bahn $\mathfrak{G}h$. Für jeden Vektor $g \in \overline{\mathfrak{G}}h$ gilt $\mathfrak{G}g \subseteq \overline{\mathfrak{G}}h$. Ist der Vektor $h \in \mathfrak{H}$ so beschaffen, daß $\overline{\mathfrak{G}}g = \overline{\mathfrak{G}}h$ für jedes $g \in \overline{\mathfrak{G}}h$ gilt, so heiße h ein unter $\mathfrak{G}$ reversibler Vektor (Definition III.2); die Gesamtheit aller reversiblen Vektoren $r \in \mathfrak{H}$ heiße $\mathfrak{R}$. Mittels des ZORNschen Lemmas (BOURBAKI [8,] S. 37) zeigt man: Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ enthält $\overline{\mathfrak{G}}h$ mindestens einen reversiblen Vektor (vgl. den Beweis des Satzes II.3.1; aus dieser Aussage läßt sich übrigens leicht ein Beweis des oben formulierten Fixpunktsatzes gewinnen; man kann nämlich zeigen: Ist die Halbgruppe $\mathfrak{G}$ konvex, so ist jeder unter $\mathfrak{G}$ reversible Vektor ein Fixpunkt bezüglich $\mathfrak{G}$; vgl. Kap. II, § 3). Dies ist bereits nahezu die Existenzaussage aus dem

Aufspaltungssatz II. *$\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$. Es gilt*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R} + \mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}.$$

Genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt mindestens eine Darstellung

$$h = r + f, \qquad r \in \mathfrak{R}, \qquad f \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten r, f von h hängen linear, stetig und invariant von h ab (Satz III.2.2).

Die Eindeutigkeitsaussage dieses Satzes kann man nach einem Verfahren, welches ich an anderer Stelle angegeben habe, beweisen (Kap. III, § 4; vgl. JACOBS [28]). Man benützt hierbei die duale Halbgruppe $\mathfrak{G}'$ im dualen Raum $\mathfrak{G}'$ (Kap. III, § 4) symmetrisch zu $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$.

Der Definition des Begriffs „reversibel" liegt der Gedanke zugrunde, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ sich bezüglich reversibler Vektoren wie eine Gruppe verhält (vgl. die Anmerkung nach der Definition III.2). In der Tat gilt: Die von $\overline{\mathfrak{G}}$ im invarianten Teilraum $\mathfrak{R}$ induzierte Halbgruppe ist eine **Gruppe** (Satz III.5.1).

Wir haben nun noch zu zeigen, daß $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$ gilt. Dann wird der Aufspaltungssatz I bewiesen sein. Für gleichmäßig-konvexe Räume und duale Räume von solchen kann man hierzu ein Verfahren anwenden, welches ich an anderer Stelle angegeben habe (JACOBS [*28*]; Satz III.5.2). Es gibt jedoch auch reflexive Banachräume, die sich nicht gleichmäßig-konvex normieren lassen (DAY [*12*]). Aus diesem Grunde wird im Kap. IV eine Methode entwickelt, mit welcher man die Aussage $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$ allgemein für reflexive Banachräume beweisen kann.

Man sieht zunächst, daß $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{R}$ gilt (Satz II.2.1). Auf Grund dieser Tatsache können wir nach dem vorhin erwähnten Ergebnis stets annehmen, daß $\mathfrak{G}$ eine Gruppe sei. Wir beweisen nun allgemein den Aufspaltungssatz I für Gruppen (Kap. IV, § 2); dabei werden Teile der von EBERLEIN gegebenen Theorie der schwach-fastperiodischen Funktionen auf abelschen Gruppen als wesentliches Beweismittel herangezogen (Satz IV.1.2, Satz IV.2.2). Wendet man den so gewonnenen Aufspaltungssatz auf den Raum $\mathfrak{R}$, der keine Fluchtvektoren mehr enthält, an, so folgt $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$. Damit ist der Aufspaltungssatz I vollständig bewiesen.

Im Anhang I wird gezeigt, daß sich der Aufspaltungssatz I auch allgemeiner für gleichmäßig-stetige abelsche Halbgruppen in reflexiven lokalkonvexen topologischen Vektorräumen beweisen läßt.

Im Anhang II wird eine neue Ausführung der Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen skizziert.

Im Anhang III betrachten wir den Spezialfall kontrahierender abelscher Halbgruppen $\mathfrak{G}$ in einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$. Für zyklische Halbgruppen wird der Aufspaltungssatz mittels eines Satzes von SZ.-NAGY ([*42*], [*43*]) auf den entsprechenden Aufspaltungssatz für zyklische *unitäre Gruppen* (MAAK [*40*], JACOBS [*28*]) zurückgeführt; es werden einige Verschärfungen bewiesen. Anschließend wird gezeigt, daß dieselben Verschärfungen sich allgemein für abelsche Halbgruppen (und ohne Verwendung des „Unitarisierungssatzes" von SZ.-NAGY) gewinnen lassen; zugleich ergibt sich eine Unitaritätsaussage für $\mathfrak{G}$.

Verallgemeinerungen auf nicht-beschränkte Halbgruppen (vgl. DUNFORD-MILLER [*20*], DUNFORD [*19*]) und auf auflösbare Halbgruppen (DAY [*15*]) werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Auf Anwendungen der gewonnenen Ergebnisse in der Theorie der verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen (vgl. den Literaturbericht von MAAK [*36*], S. 222ff.), der MARKOFFschen Prozesse (vgl. z. B. YOSIDA-KAKUTANI [*58*], DOOB [*17*]) und der Spektraltheorie (vgl. z. B. DUNFORD [*19*], LORCH [*35*]) soll an anderer Stelle eingegangen werden.

Anmerkung. Als *Teilräume* eines Banachraumes $\mathfrak{H}$ werden in dieser Abhandlung nur *abgeschlossene* lineare Teilmannigfaltigkeiten von $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

Anmerkung. Um eine allzu komplizierte Ausdrucksweise zu vermeiden, soll in dieser Abhandlung der Unterschied zwischen einer abstrakten Halbgruppe und einer Darstellung derselben nicht ausdrücklich hervorgehoben werden. Dieser Unterschied wird im wesentlichen nur dann von Bedeutung,

wenn man von einer Darstellung zur andern übergeht, wie dies strenggenommen z. B. bei der Einführung der Annahme $\mathfrak{C}$ (Kap. III, § 5, insbesondere im Beweis des Satzes III.5.2) der Fall ist. Auf die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit hat dies keinen Einfluß.

Kap. I. Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

Es sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$ ein komplexer Banachraum. Die für die Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ erklärte Norm bezeichnen wir mit $|h|$.

Es sei $\mathfrak{H}' = \{h', g', f', \ldots\}$ der zu $\mathfrak{H}$ *duale* Banachraum. $\mathfrak{H}'$ besteht aus den sämtlichen stetigen Linearformen h' auf $\mathfrak{H}$. Der Wert der Linearform $h' \in \mathfrak{H}'$ an der Stelle $h \in \mathfrak{H}$ werde mit (h, h') bezeichnet. In $\mathfrak{H}'$ ist die Norm, wie üblich, durch die Festsetzung

$$|h'| = \sup_{|h| \leq 1} |(h, h')| \tag{1}$$

gegeben. Nach dem *Satz von Hahn-Banach* (Banach [*4*], S. 27 f., S. 55; Bourbaki [*10*], S. 101) gilt dann auch umgekehrt stets

$$|h| = \sup_{|h'| \leq 1} |(h, h')|. \tag{2}$$

Der Raum $\mathfrak{H}'$ induziert im Raum $\mathfrak{H}$ die sog. *schwache Topologie*. Für diese Topologie ist eine Umgebungsbasis an der Stelle $0 \in \mathfrak{H}$ durch die Mengen der Gestalt

$$\mathfrak{U} = \{h \mid |(h, h'_\nu)| < \varepsilon, \quad \nu = 1, \ldots, n\}$$

mit beliebigem $\varepsilon > 0$ und beliebigen Vektoren $h'_1, \ldots, h'_n \in \mathfrak{H}'$ gegeben; diese Mengen heißen auch schwache Umgebungen von $0 \in \mathfrak{H}$. Die schwachen Umgebungen eines beliebigen Punktes $h \in \mathfrak{H}$ erhält man aus den schwachen Umgebungen des Punktes $0 \in \mathfrak{H}$ durch Translation um h. Ist eine Folge $h_\nu \in \mathfrak{H}$ schwach-konvergent mit dem Limes $h \in \mathfrak{H}$, so schreiben wir kurz

$$h_\nu \to h \quad \text{(schwach)}$$

oder

$$\lim_{\nu \to \infty} h_\nu = h \quad \text{(schwach)}.$$

Im Gegensatz zur schwachen Topologie wird die Normtopologie in $\mathfrak{H}$ auch die *starke* Topologie genannt. Ist eine Folge $g_i \in \mathfrak{H}$ stark-konvergent mit dem Limes $g \in \mathfrak{H}$, so schreiben wir kurz

$$g_i \to g \quad \text{(stark)}$$

oder

$$\lim_{i \to \infty} g_i = g \quad \text{(stark)}.$$

Allgemein sind bezüglich beider Topologien die Begriffe „konvergentes Filter" und „Cauchy-Filter" (Bourbaki [*9*], S. 10) erklärt.

Die schwache Topologie hat mit der starken Topologie einige einfache Eigenschaften gemeinsam. So ist der Limes eines schwach-konvergenten

Filters F in $\mathfrak{H}$ stets eindeutig durch F bestimmt, hängt linear von F ab und seine Norm beistzt, falls F beschränkt ist, dieselbe Schranke wie F.

Ist $\mathfrak{H}$ von endlicher Dimension, so ist die schwache Topologie zur starken Topologie äquivalent. Ist $\mathfrak{H}$ von unendlicher Dimension, so ist dies niemals der Fall. Man kann z. B. beweisen, daß jedes beschränkte Filter in $\mathfrak{H}$ sich zu einem Cauchy-Filter bezüglich der schwachen Topologie verfeinern (BOURBAKI [9], S. 8) läßt (die Verfeinerung muß nicht notwendig schwach-konvergent sein); dagegen gibt es in jedem unendlich-dimensionalen Banachraum beschränkte Filter, die sich nicht zu einem Cauchy-Filter bezüglich der starken Topologie verfeinern lassen (vgl. RIESZ [50], S. 78; BANACH [4], S. 84).

Die Gleichung (2) stellt eine Beziehung zwischen der schwachen und der starken Topologie in $\mathfrak{H}$ dar. Eine schärfere Beziehung liefert der

Satz I.1 (MAZUR). *Jede konvexe stark-abgeschlossene Menge in $\mathfrak{H}$ ist auch schwach-abgeschlossen* (BOURBAKI [10], S. 73; NIKAIDÔ [48]).

Man kann zum dualen Banachraum $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$ nochmals den dualen Banachraum $\mathfrak{H}''$ bilden und einsehen, daß $\mathfrak{H}$ auf natürliche Weise isometrisch in $\mathfrak{H}''$ eingebettet ist: $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}''$. Hierbei gilt im allgemeinen nicht das Gleichheitszeichen (vgl. RIESZ-NAGY [54], S. 211).

Definition I. *Der Banachraum $\mathfrak{H}$ heißt reflexiv, wenn $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}''$ gilt, d. h. wenn es zu jeder stetigen Linearform L auf $\mathfrak{H}'$ einen Vektor $h \in \mathfrak{H}$ gibt, derart, daß*

$$L(g') = (h, g') \quad \text{für jedes} \quad g' \in \mathfrak{H}'$$

gilt.

Ein Kriterium für die Reflexivität von Banachräumen liefert der

Satz I.2 (BANACH-ARENS). *Der Banachraum $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann reflexiv, wenn jedes beschränkte Filter F in $\mathfrak{H}$ eine schwach-konvergente Verfeinerung besitzt* (BANACH [4], S. 189; ARENS [3]; vgl. auch den sehr eleganten Beweis von NIKAIDÔ [48]).

Anmerkung. Da man jedes beschränkte Filter in $\mathfrak{H}$ zu einem Cauchy-Filter bezüglich der schwachen Topologie verfeinern kann, ist die Reflexivität von $\mathfrak{H}$ äquivalent zur Schwach-Vollständigkeit von $\mathfrak{H}$ (falls man nur beschränkte Filter in Betracht zieht).

Beispiele reflexiver Banachräume sind die *gleichmäßig-konvex* (CLARKSON [11]) normierbaren Räume (PETTIS [49]; NIKAIDÔ [48]); ebenso die „gleichmäßig-flach" normierbaren Räume (DAY [14]; NAKANO [44]). Insbesondere ist jeder Hilbertraum ein reflexiver Banachraum (man kann sogar schon $\mathfrak{H}'$ mit $\mathfrak{H}$ identifizieren). Es gibt aber auch reflexive Banachräume, die sich nicht gleichmäßig-konvex normieren lassen (DAY [12]).

Man beweist ohne Schwierigkeit den

Satz I.3. *Jeder Teilraum eines reflexiven Banachraumes ist ein reflexiver Banachraum. Ein Banachraum $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann reflexiv, wenn auch der duale Raum $\mathfrak{H}'$ reflexiv ist.*

Mit Hilfe des Satzes I.2 ergibt sich sofort der

Satz I.4. *Jedes absteigende System nichtleerer, beschränkter, schwach-abgeschlossener Mengen in einem reflexiven Banachraum $\mathfrak{H}$ besitzt einen nichtleeren Durchschnitt.*

Man kann in reflexiven Räumen das Arbeiten mit *Filtern* weitgehend durch das Arbeiten mit *gewöhnlichen Folgen* ersetzen und dadurch schärfere Ergebnisse erhalten. Dies wird ermöglicht durch den

Satz I.5 (Abzählbarkeitssatz). *Ist F ein beschränktes Filter in dem reflexiven Banachraum $\mathfrak{H}$, welches schwach gegen den Limes $f \in \mathfrak{H}$ konvergiert, und ist $\mathfrak{F} \in F$ beliebig gewählt, dann gibt es in $\mathfrak{F}$ eine Folge $f_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, derart, daß*

$$f_\nu \to f \quad \text{(schwach)}$$

d. h.

$$(f_\nu, h') \to (f, h') \quad \textit{für jedes} \quad h' \in \mathfrak{H}'$$

gilt.

Beweis. Sei etwa $|f| \leqq A$ für jedes $f \in \mathfrak{F}$. Wir setzen $\mathfrak{K} = \{h \mid |h| \leqq A\}$. Dabei sei $A > 0$.

1. Sei $f_1 \in \mathfrak{F}$ beliebig gewählt und $\mathfrak{H}_1$ der von f und f_1 aufgespannte, höchstens 2-dimensionale Teilraum von $\mathfrak{H}$. Sei $g_{11}, \ldots, g_{1n_1}$ ein System von endlichvielen Punkten in $\mathfrak{H}_1$, deren 1-Umgebungen zusammen die (stark-kompakte!) Menge $1 \cdot \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}_1$ überdecken. Seien $h'_{11}, \ldots, h'_{1n_1} \in \mathfrak{H}'$ derart gewählt, daß

$$|h'_{1\nu}| = 1, \quad |(g_{1\nu}, h'_{1\nu})| \geqq \tfrac{1}{2} |g_{1\nu}| \qquad (\nu = 1, \ldots, n_1)$$

gilt. Das ist nach (2) möglich.

2. Wir bestimmen $f_2 \in \mathfrak{F}$ derart, daß

$$|(f_2 - f, h'_{1\nu})| < \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 1, \ldots, n_1)$$

gilt. Sei $\mathfrak{H}_2$ der von f, f_1 und f_2 aufgespannte, höchstens 3-dimensionale Teilraum von $\mathfrak{H}$. Sei $g_{21}, \ldots, g_{2n_2}$ ein System von endlichvielen Punkten in $\mathfrak{H}_2$, deren $\frac{1}{2}$-Umgebungen zusammen die (stark-kompakte!) Menge $2 \cdot \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}_2$ überdecken. Seien $h'_{21}, \ldots, h'_{2n_2} \in \mathfrak{H}'$ derart gewählt, daß

$$|h'_{2\nu}| = 1, \quad |(g_{2\nu}, h'_{2\nu})| \geqq \tfrac{1}{2} |g_{2\nu}| \qquad (\nu = 1, \ldots, n_2)$$

gilt.

3. Wir bestimmen $f_3 \in \mathfrak{F}$ derart, daß

$$|(f_3 - f, h'_{2\nu})| < \tfrac{1}{3} \qquad (\nu = 1, \ldots, n_2)$$

gilt. Sei $\mathfrak{H}_3$ der von $f, f_1, \ldots, f_3$ aufgespannte, höchstens 4-dimensionale Teilraum von $\mathfrak{H}$. Sei $g_{31}, \ldots, g_{3n_3}$ ein System von endlichvielen Punkten in $\mathfrak{H}_3$, deren $\frac{1}{3}$-Umgebungen zusammen die (stark-kompakte!) Menge $3 \cdot \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}_3$ überdecken. Seien $h'_{31}, \ldots, h'_{3n_3} \in \mathfrak{H}'$ derart gewählt, daß

$$|h'_{3\nu}| = 1, \quad |(g_{3\nu}, h'_{3\nu})| \geqq \tfrac{1}{2} |g_{3\nu}| \qquad (\nu = 1, \ldots, n_3)$$

gilt.

Wir zeigen nun, daß

$$f_\nu \to f \quad \text{(schwach)} \tag{3}$$

gilt. Sei $g_1, g_2, \ldots$ eine Durchzählung der Vektoren $g_{k\nu}(k=1, 2, \ldots; \nu=1, \ldots, n_k)$ und $h_1', h_2', \ldots$ die entsprechende Durchzählung der $h_{k\nu}'$. Sei $\mathfrak{H}_0$ der von $f, f_1, f_2, \ldots$ aufgespannte Teilraum von $\mathfrak{H}$. Die Folge $g_1, g_2, \ldots$ liegt stark-dicht in $\mathfrak{H}_0$. Sämtliche f_ν liegen in $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}_0$, ebenso f.

Sei F_0 das der Folge $f_1, f_2, \ldots$ entsprechende Frechet-Filter (BOURBAKI [9], S. 8). Zum Beweise von (3) genügt es, zu zeigen, daß jede schwach-konvergente Verfeinerung von F_0 gegen f konvergiert. Sei also $\overline{F}_0$ eine schwach-konvergente Verfeinerung von F_0 und f_0 ihr Limes. Aus Satz I.1 folgt $f_0 \in \mathfrak{H}_0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann kann man g_n derart bestimmen, daß

$$|(f_0 - f) - g_n| < \frac{\varepsilon}{6}$$

gilt. Nunmehr hat man

$$\begin{aligned} |(f_0 - f, h_n')| &\geq |(g_n, h_n')| - \frac{\varepsilon}{6}|h_n'| \\ &\geq \frac{1}{2}|g_n| - \frac{\varepsilon}{6} \\ &\geq \frac{1}{2}|f_0 - f| - \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Wir können $N > 0$ derart bestimmen, daß für $\nu > N$ stets

$$|(f_\nu - f, h_n')| < \frac{\varepsilon}{8}$$

gilt. Unter Zuhilfenahme von $\overline{F}_0$ kann man $\nu > N$ so wählen, daß außerdem

$$|(f_\nu - f_0, h_n')| < \frac{\varepsilon}{8}$$

gilt. Insgesamt haben wir dann

$$|f_0 - f| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich $f_0 = f$. q. e. d.

Anmerkung. Vgl. den ähnlichen Satz von EBERLEIN ([21]; DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [16], S. 88). Wie ein Beispiel von v. NEUMANN zeigt ([45], S. 380), ist die Beschränktheitsannahme für die Gültigkeit des Abzählbarkeitssatzes unentbehrlich.

Aus dem Abzählbarkeitssatz lassen sich einige einfache Folgerungen ziehen.

Satz I.6. *Sei $\mathfrak{H}$ ein reflexiver Banachraum. Die schwach-abgeschlossene Hülle einer beschränkten Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ besteht aus allen Punkten $h \in \mathfrak{H}$, die als Limites schwach-konvergenter Folgen $h_\nu \in \mathfrak{M}$ auftreten können.*

Satz I.7. *Jede beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum besitzt eine schwach-konvergente Teilfolge.*

Kap. II. Fastperiodische Vektoren und Fluchtvektoren

Sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$ ein beliebiger komplexer Banachraum. Es sei $\mathfrak{G} = \{x, y, a, b, \ldots\}$ eine beschränkte Halbgruppe von linearen Transformationen $x, y, \ldots$ in $\mathfrak{H}$; es gibt also eine Zahl $\Gamma > 0$ derart, daß stets

$$|xh| \leq \Gamma |h| \qquad (x \in \mathfrak{G},\ h \in \mathfrak{H})$$

gilt. $\mathfrak{G}$ enthalte die identische Transformation e. Es ist also stets $\Gamma \geq 1$. Für jeden Vektor $h \in \mathfrak{H}$ bezeichnen wir die Menge $\{xh \mid x \in \mathfrak{G}\} = \mathfrak{G}h$ auch als die „Bahn" von h unter $\mathfrak{G}$.

Wir wollen die Fastperiodizitätseigenschaften der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ untersuchen.

§1. Fastperiodische Vektoren

Der Begriff „fastperiodisch" ist von Maak für komplexwertige Funktionen auf beliebigen abstrakten Halbgruppen mit Einselement erklärt worden (Maak [38]). Wir betrachten nun auf unserer Halbgruppe $\mathfrak{G}$ Funktionen mit Werten aus $\mathfrak{H}$, und zwar Funktionen der Form

$$h(x) = xh$$

mit beliebigem, festem $h \in \mathfrak{H}$. In sinngemäßer Übertragung der Definition von Maak geben wir nun die

Definition II.1. *Seien $h \in \mathfrak{H}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Ein endliches System $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von Teilmengen von $\mathfrak{G}$ heißt eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$, wenn folgendes gilt:*

1. $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{G}$.

2. Gibt es zu zwei Elementen $x, y \in \mathfrak{G}$ zwei weitere Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$, derart, daß für geeignetes ν

$$axb \in \mathfrak{A}_\nu, \qquad ayb \in \mathfrak{A}_\nu$$

gilt, so gilt

$$|cxdh - cydh| < \varepsilon$$

für alle $c, d \in \mathfrak{G}$.

Ein Vektor $p \in \mathfrak{H}$, der zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{p; \varepsilon\}$ besitzt, heißt fastperiodisch unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$. Die Menge aller unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren $p \in \mathfrak{H}$ heiße $\mathfrak{P}$.

Beispielsweise ist jeder unter $\mathfrak{G}$ *fixe* Vektor $p \in \mathfrak{H}$ (d. h. jeder Vektor, welcher $xp = p$ für alle $x \in \mathfrak{G}$ erfüllt) fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$; insbesondere ist der Vektor $0 \in \mathfrak{H}$ stets fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$.

Für fastperiodische Vektoren läßt sich eine Mittelwerttheorie von außerordentlicher Schärfe und Eleganz mittels des sog. *Verheiratungssatzes* (vgl. Weyl [56], S. 202; Maak [36], S. 234) durchführen (vgl. Maak [36], S. 31 ff.); doch soll an dieser Stelle hierauf nicht eingegangen werden.

Man beweist leicht den

Satz II.1.1. *Die Menge $\mathfrak{P}$ aller unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren ist ein linearer invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$* (vgl. MAAK [38], S. 37).

Nahezu trivial ist ferner der

Satz II.1.2. *Für jeden Vektor $p \in \mathfrak{P}$ ist die Bahn $\mathfrak{G}p$ totalbeschränkt, d.h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ endlichviele Vektoren $h_1, \ldots, h_m \in \mathfrak{H}$, derart, daß für jedes $x \in \mathfrak{G}$ ein μ mit*

$$|xp - h_\mu| < \varepsilon$$

existiert (vgl. ALEXANDROFF-HOPF [2], S. 104).

Dagegen ist ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ mit totalbeschränkter Bahn $\mathfrak{G}h$ nicht notwendig fastperiodisch. Dies ergibt sich aus folgendem

Beispiel 1. Sei $\mathfrak{H}$ beliebig. $\mathfrak{G}$ bestehe aus den Transformationen e und 0. Dann ist für jedes $h \in \mathfrak{H}$ die Bahn $\mathfrak{G}h$ die endliche, also gewiß totalbeschränkte, Menge $\{h, 0\}$. Sei $h \neq 0$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|h|$. Dann kommt als Teilung $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$ nur das System der beiden Mengen $\mathfrak{A}_e = \{e\}$ und $\mathfrak{A}_0 = \{0\}$ in Frage. Sei $x = e$, $y = 0$, $a = b = 0$; dann gilt

$$axb \in \mathfrak{A}_0, \qquad ayb \in \mathfrak{A}_0.$$

Dagegen ist für $c = d = e$

$$|cxdh - cydh| = |h| > \varepsilon.$$

Die Definition II.1 ist also nicht erfüllt, h ist nicht fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$.

Man kann leicht den folgenden Satz beweisen:

Satz II.1.3. *Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, so ist ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ dann und nur dann fastperiodisch, wenn die Bahn $\mathfrak{G}h$ totalbeschränkt ist* (vgl. MAAK [36], S. 152 f.; MAAK [37], S. 163).

Ist $\mathfrak{G}$ aber keine Gruppe, so muß ein Vektor $h \in \mathfrak{G}$ mit totalbeschränkter Bahn $\mathfrak{G}h$, um fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$ zu sein, noch weitere Bedingungen erfüllen und man kann vermuten, daß diese Bedingungen etwa besagen, daß sich $\mathfrak{G}$ bezüglich h annähernd wie eine Gruppe verhält; charakteristische Gruppeneigenschaft ist die Möglichkeit der Division. In der Tat gilt der

Satz II.1.4. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, wenn folgendes gilt:*

1. $\mathfrak{G}h$ ist eine totalbeschränkte Menge in $\mathfrak{H}$.

2. Sind die Elemente $x, y \in \mathfrak{G}$ beliebig gewählt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Elemente $s, t \in \mathfrak{G}$, derart, daß

(1) $$|xth - yh| < \varepsilon$$

und — identisch in $z \in \mathfrak{G}$ —

(2) $$|sxzh - yzh| < \varepsilon$$

gilt.

Beweis. I. Sei $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$. Es ist nur noch Nr. 2 zu beweisen.

Wir beweisen zunächst (1). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Es gibt Teilungen $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$. Wir erweitern nun unseren Teilungsbegriff etwas. Seien $a_0, b_0 \in \mathfrak{G}$, $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Unter einer Teilung $\mathfrak{T}\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ verstehen wir ein System $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ von Teilmengen von $\mathfrak{G}$, für welches die folgenden Aussagen gelten:

1. $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{G}$.

2. Aus $c, d \in \mathfrak{G}$, $x, y \in \mathfrak{A}_\nu$ folgt

$$|c a_0 x b_0 d h - c a_0 y b_0 d h| < \varepsilon.$$

3. Aus $c, d \in \mathfrak{G}$, $cxd, cyd \in \mathfrak{A}_\nu$ folgt

$$|xh - yh| < \varepsilon.$$

Unsere ursprünglichen Teilungen $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$ sind Teilungen $\mathfrak{T}\{h; e, e; \varepsilon\}$. Eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ besteht aus einer gewissen Anzahl von Teilmengen von $\mathfrak{G}$. Unter den bei unserem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ — aber beliebig wählbaren a_0, b_0 — möglichen Anzahlen gibt es eine kleinste $n(\varepsilon)$. Eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ mit $n(\varepsilon)$ Bestandteilen heiße eine *Minimalteilung*. Sei $\mathfrak{T}_0\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ eine Minimalteilung. Ein von MAAK bewiesener Satz ([38], S. 40; der Beweis läßt sich ohne weiteres auf unseren Fall übertragen) lautet: *Eine Minimalteilung $\mathfrak{T}_0\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ erstreckt sich stets quer durch die ganze Halbgruppe, d. h. für jedes $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0$ und beliebige $c, d \in \mathfrak{G}$ ist die Menge $c\mathfrak{G}d \cap \mathfrak{A}$ nichtleer.* Wir wählen nun $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_0\{h; a_0, b_0; \varepsilon\}$ so, daß das Element $y \in \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$ liegt, und setzen $c = x$, $d = e$. Dann gibt es ein $t \in \mathfrak{G}$ mit $xt \in \mathfrak{A}$. Nach der Definition II.1 ist dann

$$|xth - yh| < \varepsilon.$$

Nun beweisen wir (2). Der Beweis ist ähnlich, aber etwas komplizierter.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir bestimmen Elemente $z_1, \ldots, z_m \in \mathfrak{G}$ derart, daß für jedes $z \in \mathfrak{G}$ ein μ mit

$$|zh - z_\mu h| < \frac{\varepsilon}{4\Gamma}$$

existiert. Nun betrachten wir die abstrakte direkte Summe $\hat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}$ von m Exemplaren des Banachraumes $\mathfrak{H}$. $\hat{\mathfrak{H}}$ besteht also aus den sämtlichen formalen Ausdrücken $[h_1, \ldots, h_m]$ mit $h_\mu \in \mathfrak{H}$, wobei das lineare Rechnen komponentenweise vorzunehmen ist. Wir führen in $\hat{\mathfrak{H}}$ die Norm $|[h_1, \ldots, h_m]| = \sum_{\mu=1}^{m} |h_\mu|$ ein. Dadurch wird $\hat{\mathfrak{H}}$ zu einem Banachraum gemacht. Setzt man für beliebiges $x \in \mathfrak{G}$

$$\hat{x}[h_1, \ldots, h_m] = [xh_1, \ldots, xh_m],$$

so erhält man in $\hat{\mathfrak{H}}$ eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Halbgruppe $\hat{\mathfrak{G}}$. Der Vektor $\hat{h} = [z_1 h, \ldots, z_m h]$ ist nun, wie man ohne weiteres sieht (vgl. Satz II.1.1), fastperiodisch unter $\hat{\mathfrak{G}}$. Betrachten wir nun eine Minimalteilung $\mathfrak{T}_0\left\{\hat{h}; \hat{a}_0, \hat{b}_0; \frac{\varepsilon}{2}\right\}$

in $\widehat{\mathfrak{G}}$, so erhalten wir analog wie vorhin zu beliebigen $x, y \in \mathfrak{G}$ ein $s \in \mathfrak{G}$, derart, daß

$$|sxz_\mu h - yz_\mu h| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

gilt. Dann gilt aber für beliebiges $z \in \mathfrak{G}$ und geeignetes μ

$$\begin{aligned} |sxzh - yzh| &\leq |sxzh - sxz_\mu h| + \frac{\varepsilon}{2} + |yz_\mu h - yzh| \\ &\leq 2\Gamma |zh - z_\mu h| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

II. Sei $h \in \mathfrak{H}$ derart, daß die Aussagen Nr. 1 und 2 unseres Satzes gelten. Wir führen den Beweis für die Fastperiodizität von h in mehreren Schritten.

1. Für beliebige $a, z, t \in \mathfrak{G}$ gilt

$$|zh - th| \leq \Gamma |azh - ath|. \tag{3}$$

Denn man kann ja nach Nr. 2 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $s \in \mathfrak{G}$ derart bestimmen, daß

$$|sazh - zh| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |sath - th| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} |zh - th| &< \varepsilon + |sazh - sath| \\ &\leq \varepsilon + \Gamma |azh - ath|, \end{aligned}$$

und dies ergibt die Behauptung (3).

2. Wir wählen auf Grund der Totalbeschränktheit von $\mathfrak{G}h$ die Elemente $t_\mu \in \mathfrak{G}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ derart, daß zu jedem $t \in \mathfrak{G}$ ein μ mit

$$|th - t_\mu h| < \frac{\varepsilon}{8\Gamma^3}$$

existiert. Die Bahnen $\mathfrak{G}t_\mu h (\mu = 1, \ldots, m)$ sind totalbeschränkt. Man kann daher endlichviele Mengen $\mathfrak{A}_\nu \in \mathfrak{G}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ mit $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{G}$ derart bestimmen, daß für $x, y \in \mathfrak{A}_\nu$

$$|xt_\mu h - yt_\mu h| < \frac{\varepsilon}{4\Gamma^2}$$

und somit

$$|xth - yth| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma^2} \quad \text{(für alle } t \in \mathfrak{G}) \tag{4}$$

gilt.

3. Nun zeigen wir, daß die Mengen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$ bilden. Seien also die Elemente $x, y, a, b \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$axb \in \mathfrak{A}_\nu, \qquad ayb \in \mathfrak{A}_\nu$$

gilt. Seien die Elemente $c, d \in \mathfrak{G}$ beliebig gewählt. Wir bestimmen ein $t \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$|bth - dh| < \frac{\varepsilon}{4\Gamma^3} \tag{5}$$

gilt. Dann haben wir

$$\begin{aligned} |cxdh - cydh| &\leq \Gamma |xdh - ydh| \\ &\leq \Gamma^2 |axdh - aydh| && \text{(nach (3))} \\ &< \Gamma^2 |axbth - aybth| + \frac{\varepsilon}{2} && \text{(nach (5))} \\ &< \varepsilon && \text{(nach (4))}. \end{aligned}$$

q. e. d.

Anmerkung. Die erste Hälfte dieses Beweises läßt sich leicht zu einem Beweis der folgenden Aussage ausgestalten: *Sind $p_1, \ldots, p_r$ endlichviele unter $\mathfrak{G}$ fastperiodische Vektoren, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $x \in \mathfrak{G}$ ein $t \in \mathfrak{G}$ derart, daß*

$$|txp_\varrho - p_\varrho| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, \ldots, r) \tag{6}$$

gilt. — Von dieser Aussage werden wir beim Beweis des Satzes II.1.6 Gebrauch machen.

Es gilt nun der

Satz II 1.5 **(Approximationssatz)**. *Der Raum $\mathfrak{P}$ der unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren ist die lineare stark-abgeschlossene Hülle seiner endlichdimensionalen invarianten irreduziblen Teilräume.*

Zum Beweis dieses Satzes zeigen wir zunächst, daß man den Fall der *Halbgruppen* auf den der *Gruppen* zurückführen kann, indem man die von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}$ induzierte Halbgruppe *innerhalb von* $\mathfrak{P}$ in eine geeignete Gruppe einbettet. Dieser Gedanke liegt auch der Maakschen Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen zugrunde. Die Einbettung erfolgt bei Maak auf *algebraischem* Wege. Hier soll ein *topologisches* Einbettungsverfahren angegeben werden. Es ergibt sich dabei zugleich ein neuer Zugang zur Theorie von Maak (s. Anhang II).

Satz II.1.6 **(Einbettungssatz)**. *Es sei $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$. Sei $\overline{\mathfrak{G}} = \{\bar{x}, \bar{y}, \ldots\}$ die Menge aller linearen Transformationen $\bar{x}$ in $\mathfrak{H}$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt zu endlichvielen Vektoren $h_1, \ldots, h_r \in \mathfrak{H}$ und zu beliebig gewähltem $\varepsilon > 0$ ein $x \in \mathfrak{G}$ derart, daß*

$$|xh_\varrho - \bar{x}h_\varrho| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

gilt. Dann ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine die Halbgruppe $\mathfrak{G}$ enthaltende **Gruppe**. *$\overline{\mathfrak{G}}$ besitzt ebenfalls die Schranke Γ. Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist fastperiodisch unter der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$. Jeder unter $\mathfrak{G}$ invariante Teilraum von $\mathfrak{H}$ ist auch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant.*

Beweis. 1. Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist die Menge $\mathfrak{G}h$ totalbeschränkt. Die Menge $\overline{\mathfrak{G}}h$ ist jedenfalls in der stark-abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{G}h$ enthalten, also

wiederum totalbeschränkt. Ferner ergibt sich, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ die Schranke Γ besitzt und daß jeder unter $\mathfrak{G}$ invariante Teilraum von $\mathfrak{H}$ auch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant ist. Natürlich ist $\overline{\mathfrak{G}} \supseteq \mathfrak{G}$.

2. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine Halbgruppe. Denn seien $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ und $h_1, \ldots, h_r \in \mathfrak{H}$, sowie ein $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir bestimmen $x, y \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$\left.\begin{aligned} |y h_\varrho - \bar{y} h_\varrho| &< \frac{\varepsilon}{2\Gamma} \\ |x\bar{y} h_\varrho - \bar{x}\bar{y} h_\varrho| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

gilt. Dann folgt

$$|xy h_\varrho - \bar{x}\bar{y} h_\varrho| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Hierbei ist $xy \in \mathfrak{G}$. Somit folgt $\bar{x}\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$.

3. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine **Gruppe**. Zum Beweis dieser Aussage benützen wir die Aussage Nr. 2 des Satzes II.1.4 in der im Anschluß an den Beweis dieses Satzes formulierten Verallgemeinerung (6).

Sei $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ beliebig gewählt. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und beliebig gewählten Vektoren $h_1, \ldots, h_m \in \mathfrak{H}$ bestimmen wir zunächst ein $x \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$|x h_\mu - \bar{x} h_\mu| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

gilt. Nun bestimmen wir gemäß (6) ein $t \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$|t x h_\mu - h_\mu| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

gilt. Wir haben dann

$$|t\bar{x} h_\mu - h_\mu| < \varepsilon \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{7}$$

Bezeichnen wir die Menge aller $t \in \mathfrak{G}$, welche (7) erfüllen, mit $\mathfrak{F}(h_1, \ldots, h_m; \varepsilon)$, so ist $\mathfrak{F}(h_1, \ldots, h_m; \varepsilon)$ stets nichtleer. Der Durchschnitt zweier Mengen dieser Art enthält stets eine dritte Menge dieser Art. Die $\mathfrak{F}(h_1, \ldots, h_m; \varepsilon)$ bilden also eine Filterbasis (BOURBAKI [9], S. 9) und erzeugen ein Filter F in $\mathfrak{G}$. Wir verfeinern F zu einem Ultrafilter $\overline{F}$ (BOURBAKI [9], S. 9). Es ist klar, was man für beliebiges $h \in \mathfrak{H}$ unter $\overline{F}h$ zu verstehen hat. $\overline{F}h$ ist als Ultrafilter in der totalbeschränkten Menge $\mathfrak{G}h$ stets stark-konvergent, und die Konvergenz findet offenbar gleichmäßig für endlichviele $h \in \mathfrak{H}$ statt. Durch die Festsetzung

$$\bar{t}h = \lim \overline{F}h$$

ist daher eine Transformation $\bar{t} \in \overline{\mathfrak{G}}$ erklärt. Offensichtlich ist nun

$$\bar{t}\,\bar{x} h = h \quad \text{für jedes} \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Somit besitzt $\bar{x}$ eine Inverse $\bar{x}^{-1} = \bar{t} \in \overline{\mathfrak{G}}$.

4. Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist $\overline{\mathfrak{G}}h$ totalbeschränkt. Nach Satz II.1.3 ist also jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$. q. e. d.

Mit Hilfe bekannter Sätze von Weyl [56] bzw. Maak [37] bzw. Kawada [32] kann man nun den Approcimationssatz II.1.5 gewinnen. Für die Anwendung auf numerische fastperiodische Funktionen vgl. Anhang II.

Anmerkung. Aus der Definition II.1. entnimmt man: Ist der Vektor $h \in \mathfrak{H}$ unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodisch, so ist er auch unter jeder Unterhalbgruppe von $\mathfrak{G}$ fastperiodisch. Dies Ergebnis scheint im Hinblick auf die Sätze II.1.4 und II.1.6 (bzw. den später zu beweisenden Satz II.2.1) recht merkwürdig, wenn man den Fall betrachtet, daß $\mathfrak{G}$ eine *Gruppe ist.* Sei $\mathfrak{G}_0$ eine *Unter-**Halb**gruppe* der Gruppe $\mathfrak{G}$ und $p \in \mathfrak{H}$ ein unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischer Vektor. Die Fastperiodizität von p ist nach Satz II.1.3 *allein durch die Totalbeschränktheit der Bahn* $\mathfrak{G}p$ bereits gewährleistet. Es ist trivial, daß auch die Bahn $\mathfrak{G}_0 p$ totalbeschränkt ist. Aber es ist eigenartig, daß jede *Halbgruppe* $\mathfrak{G}_0 \subseteqq \mathfrak{G}$ genügend Transformationen enthält, um sich bezüglich p *annähernd wie eine Gruppe* zu verhalten (Satz II.1.4, Satz II.1.6).

§2. Fluchtvektoren. Formulierung der Aufspaltungsaussage

Die Gesamtheit aller unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren $p \in \mathfrak{H}$ bildet einen invarianten Teilraum $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{H}$. Wir wünschen den Raum $\mathfrak{P}$ aus dem Raum $\mathfrak{H}$ abzuspalten, d. h. wir suchen einen zweiten invarianten Teilraum $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$, derart, daß $\mathfrak{H}$ direkt in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ zerfällt. Zu diesem Zweck machen wir die

Definition II.2 *Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ bezeichne $\mathfrak{G}(h)$ (Klammer!) die schwachabgeschlossene Hülle der Menge $\mathfrak{G}h$. Ein Vektor $f \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fluchtvektor unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$, wenn $0 \in \mathfrak{G}(f)$ ist, d. h. wenn in jeder schwachen Umgebung $\mathfrak{U}$ von $0 \in \mathfrak{H}$ ein Vektor xf $(x \in \mathfrak{G})$ liegt. Die Menge aller Fluchtvektoren $f \in \mathfrak{H}$ heiße $\mathfrak{F}$* (vgl. Jacobs [28]).

Der Vektor $0 \in \mathfrak{H}$ ist stets Fluchtvektor. Bei dem im vorigen Paragraphen angegebenen Beispiel 1 ist jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ein Fluchtvektor. Ein weiteres Beispiel findet sich bei Jacobs [28], S. 417. Im allgemeinen sind nicht alle Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ Fluchtvektoren. Es gilt der

Satz II.2.1. $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$, *d. h. ein von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedener Fluchtvektor ist nie fastperiodisch.*

Beweis. Sei $h \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{F}$. Wegen der Totalbeschränktheit von $\mathfrak{G}h$ ist $0 \in \mathfrak{H}$ schon in der starken Hülle von $\mathfrak{G}h$ enthalten. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und $x \in \mathfrak{G}$ derart bestimmt, daß

$$|xh| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma} \tag{7}$$

gilt. Nach Satz II.1.4 gibt es ein Element $s \in \mathfrak{G}$ mit

$$|sxh - h| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit gilt

$$|h| \leq |sxh| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \Gamma |xh| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

[wegen (7)]. Also ist $h = 0 \in \mathfrak{H}$.

Es wäre erwünscht, die folgende Aussage zu beweisen:

Aufspaltungsaussage. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$. Es gilt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P} + \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}.$$

Genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Darstellung

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad f \in \mathfrak{F}. \tag{8}$$

Die Komponenten p, f von h hängen linear, stetig und invariant von h ab.

Diese Aussage ist nicht allgemein richtig. Dies zeigt das

Beispiel 2. Sei $\mathfrak{G}_0$ die additive Gruppe der reellen Zahlen. Sei $\mathfrak{H}$ die Gesamtheit aller komplexwertigen beschränkten Funktionen $h(x)$ auf $\mathfrak{G}_0$. Führt man in $\mathfrak{H}$ die Norm

$$|h| = \sup_x |h(x)|$$

ein, so ist $\mathfrak{H}$ ein Banachraum. Durch die Festsetzung

$$ah(x) = h(x + a)$$

ist in $\mathfrak{H}$ eine (zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe) Gruppe $\mathfrak{G}$ von linearen Transformationen $a, \ldots$ definiert. $\mathfrak{G}$ hat in $\mathfrak{H}$ die Schranke 1. Jeder fastperiodische Vektor $p \in \mathfrak{H}$ wird durch eine (nicht notwendig stetige) fastperiodische Funktion (im Sinne von MAAK [36], S. 26) repräsentiert; diese Funktionen sind im Sinne der später anzugebenden Definition IV.1 *ergodisch*. Mittels Satz I.1 zeigt man leicht, daß auch jeder Fluchtvektor $f \in \mathfrak{H}$ durch eine ergodische Funktion $f(x)$ (mit dem Mittelwert 0) repräsentiert wird. Die Summe von zwei ergodischen Funktionen ist, wie man mittels der Kommutativität von $\mathfrak{G}_0$ leicht einsieht, wieder eine ergodische Funktion. Jede Funktion $h \in \mathfrak{H}$, die eine Darstellung (8) besitzt, ist also ergodisch. Es gibt in $\mathfrak{H}$ jedoch auch *nicht-ergodische* Funktionen. Eine solche ist z. B. durch

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

gegeben. Somit kann die Aufspaltungsaussage für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ nicht richtig sein.

Das Ziel dieser Abhandlung ist der

Satz II.2.2 **(Aufspaltungssatz I)**. *Ist $\mathfrak{H}$ ein reflexiver Banachraum und ist $\mathfrak{G}$ eine beschränkte abelsche Halbgruppe, so gilt die Aufspaltungsaussage: $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$. Es gilt $\mathfrak{H} = \mathfrak{P} + \mathfrak{F}$, $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$, genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Darstellung*

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten p, f von h hängen stark-stetig, linear und invariant von h ab.

Der Beweis dieses Satzes soll in zwei Schritten erfolgen. Im Kap. III führen wir den Fall der *Halbgruppen* auf den Fall der *Gruppen* zurück, indem wir einen weiteren Aufspaltungssatz beweisen [Satz II.2.2 (Aufspaltungssatz II)

ferner Satz II.5.1]. Im Kap. IV beweisen wir dann den Aufspaltungssatz I für den Fall der Gruppen. Damit wird dann der Aufspaltungssatz I vollständig bewiesen sein.

Kap. III. Reversible Vektoren und Fluchtvektoren Einbettung der Halbgruppe in eine Gruppe

Wir machen von nun an die beiden folgenden Annahmen:

Annahme $\mathfrak{A}$. *$\mathfrak{H}$ ist ein reflexiver Banachraum.*

Annahme $\mathfrak{B}$. *$\mathfrak{G}$ ist eine beschränkte abelsche Halbgruppe von linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{G}$ enthält die Identität e; $\Gamma \geqq 1$ ist eine Schranke von $\mathfrak{G}$.*

Aus der Annahme $\mathfrak{A}$ folgt insbesondere: Der duale Banachraum $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$ ist ebenfalls reflexiv (Satz I.3). In $\mathfrak{H}$ wie auch in $\mathfrak{H}'$ gilt der Abzählbarkeitssatz (Satz I.5). Zusammen mit der Annahme $\mathfrak{B}$ ergibt sich: Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist die Bahn $\mathfrak{G}h$ bedingt-schwach-kompakt (im Sinne von BOURBAKI [9], S. 45); die Menge $\mathfrak{G}(h)$ ist schwach-kompakt.

§1. Die schwach-abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$

Die Definition II.2 der Fluchtvektoren legt es nahe, die Halbgruppe $\mathfrak{G}$ durch Hinzunahme von Transformationen in $\mathfrak{H}$ zu erweitern, die als (in geeigneter Weise erklärte) schwache Limites von Transformationen aus $\mathfrak{G}$ auftreten. Dadurch lassen sich viele Überlegungen sehr einfach gestalten.

Definition III.1. *Sei $\mathfrak{T} = \{t, \ldots\}$ eine Menge von linearen Transformationen t in $\mathfrak{H}$. Unter der schwachen Hülle $\overline{\mathfrak{T}}$ von $\mathfrak{T}$ versteht man die Menge all derjenigen Transformationen $\bar{t}$ in $\mathfrak{H}$, für welche folgendes gilt:*

Sind $g_1, \ldots, g_s$ endlichviele beliebige Vektoren aus $\mathfrak{H}$ und ist $\mathfrak{U}$ eine schwache Umgebung von $0 \in \mathfrak{H}$, so gibt es ein $t \in \mathfrak{T}$ derart, daß

$$t g_\sigma - \bar{t} g_\sigma \in \mathfrak{U} \qquad (\sigma = 1, \ldots, s)$$

gilt.

Man sieht unmittelbar: $\overline{\mathfrak{T}}$ besteht aus linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$. Die schwache Hülle von $\mathfrak{T}$ ist $\overline{\mathfrak{T}}$.

Satz III.1.1. *Es sei $\overline{\mathfrak{G}}$ die schwache Hülle von $\mathfrak{G}$. Es gilt:*

1. *$\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine beschränkte abelsche Halbgruppe mit der Schranke Γ.*

2. *Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist $\overline{\mathfrak{G}}h = \mathfrak{G}(h)$.*

3. *Jeder unter $\mathfrak{G}$ invariante Teilraum von $\mathfrak{H}$ ist auch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant und umgekehrt.*

4. *In jedem invarianten Teilraum $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ induziert $\overline{\mathfrak{G}}$ eine dort schwach-abgeschlossene Halbgruppe, nämlich die* (in $\mathfrak{H}_0$ definierte) *schwache Hülle der von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ induzierten Halbgruppe.*

Beweis. 1. a) $\overline{\mathfrak{G}}$ besitzt die Schranke Γ. Dies folgt unmittelbar aus der Beziehung (2) in Kap. I. b) $\overline{\mathfrak{G}}$ ist eine Halbgruppe. Denn seien $g_\varrho \in \mathfrak{H}$ ($\varrho = 1, \ldots, r$), seien $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ beliebig gewählt und sei $\mathfrak{V} = \{k \mid |(h, h'_\nu)| < \varepsilon, \nu = 1, \ldots,\}$

eine schwache Umgebung von $0 \in \mathfrak{H}$. Wir bestimmen $x \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$x\bar{y}g_\varrho - \bar{x}\bar{y}g_\varrho \in \tfrac{1}{2}\mathfrak{V} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

gilt und setzen nunmehr $\mathfrak{U} = \left\{h \mid |(h, x'h'_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}, \nu = 1, \ldots, n\right\}$. Dabei bedeutet x' die zu x duale Transformation in $\mathfrak{H}'$ (vgl. § 4 dieses Kapitels). Nun bestimmen wir $y \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$yg_\varrho - \bar{y}g_\varrho \in \mathfrak{U} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

gilt. Daraus folgt

$$xyg_\varrho - x\bar{y}g_\varrho \in \tfrac{1}{2}\mathfrak{V} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

und somit

$$xyg_\varrho - \bar{x}\bar{y}g_\varrho \in \mathfrak{V} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Also ist $\bar{x}\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$. c) Die Halbgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ist abelsch: Wenn $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ ist, dann ist $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall $\bar{x} = x \in \mathfrak{G}$. Sei $g \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt und $\mathfrak{V} = \{h \mid |(h, h'_\nu)| < \varepsilon, \nu = 1, \ldots, n\}$ eine schwache Umgebung von $0 \in \mathfrak{H}$. Wir setzen

$$\mathfrak{W} = \left\{h \mid |(h, h'_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |(h, x'h'_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \nu = 1, \ldots, n\right\}$$

und bestimmen $y \in \mathfrak{G}$ derart, daß zugleich

$$yg - \bar{y}g \in \mathfrak{W}$$

und

$$yxg - \bar{y}xg \in \mathfrak{W}$$

gilt. Dann gilt $xyg - x\bar{y}g \in \frac{1}{2}\mathfrak{V}$, $yxg - \bar{y}xg \in \frac{1}{2}\mathfrak{V}$. Da $\mathfrak{G}$ abelsch ist, folgt

$$\bar{y}xg - x\bar{y}g \in \mathfrak{V}.$$

Da $g \in \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{V}$ beliebig waren, ergibt sich $\bar{y}x = x\bar{y}$. Wiederholt man dieselbe Überlegung, indem man $\bar{y}$ an die Stelle von x treten und $\bar{x}$ die Rolle von $\bar{y}$ spielen läßt, so ergibt sich die Kommutativität von $\overline{\mathfrak{G}}$.

2. Sei $h_0 \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt und g_0 ein Vektor aus $\mathfrak{G}(h_0)$. Es gibt also (Satz I.6) eine Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$, derart, daß

$$x_\nu h_0 \to g_0 \quad \text{(schwach)}$$

gilt. Wir verfeinern das der Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$ entsprechende Fréchet-Filter F (BOURBAKI [9], S. 8) zu einem Ultrafilter $\overline{F}$ (BOURBAKI [9], S. 9). Es ist klar, was man bei beliebig vorgegebenem $h \in \mathfrak{H}$ unter $\overline{F}h$ zu verstehen hat. $\overline{F}h$ ist als Ultrafilter in der bedingt schwach-kompakten Menge $\mathfrak{G}h$ sicherlich schwach-konvergent. Offenbar findet die Konvergenz gleichmäßig für je endlichviele $h \in \mathfrak{H}$ statt. Setzt man daher für jedes $h \in \mathfrak{H}$

$$\lim \overline{F}h = \bar{x}h,$$

so ist dadurch eine Transformation $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ gegeben. Es ist

$$\bar{x} h_0 = g_0 .$$

Also ist $\overline{\mathfrak{G}} h = \mathfrak{G}(h)$ für jedes $h \in \mathfrak{H}$.

3. Die Aussage Nr. 3 folgt aus der starken Abgeschlossenheit der Teilräume von $\mathfrak{H}$ und aus Satz I.1 (Mazur).

4. Sei $\mathfrak{H}_0$ ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}_0$ die von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_0$ induzierte Halbgruppe. Schränkt man den Definitionsbereich einer Transformation $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{H}_0$ ein, so entsteht trivialerweise eine Transformation aus der (innerhalb von $\mathfrak{H}_0$ definierten) schwachen Hülle $\overline{\mathfrak{G}}_0$ von $\mathfrak{G}_0$. Sei umgekehrt $\bar{x}_0 \in \overline{\mathfrak{G}}_0$. Für beliebig gewählte endlichviele $h_1, \ldots, h_r \in \mathfrak{H}_0$ und eine beliebige schwache Umgebung $\mathfrak{U}$ von $0 \in \mathfrak{H}$ sei $\mathfrak{F}(h_1, \ldots, h_r; \mathfrak{U})$ die Menge aller $x \in \mathfrak{G}$, welche

$$x h_\varrho - \bar{x} h_\varrho \in \mathfrak{U} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r)$$

erfüllen. Die Mengen der Gestalt $\mathfrak{F}(h_1, \ldots, h_r; \mathfrak{U})$ sind nicht-leer und bilden eine Filterbasis (Bourbaki [9], S. 9), erzeugen also ein Filter F in $\mathfrak{G}$. Wir verfeinern das Filter F zu einem Ultrafilter $\overline{F}$ (Bourbaki [9], S. 9). Es ist klar, was man für beliebiges $h \in \mathfrak{H}$ unter $\overline{F} h$ zu verstehen hat. $\overline{F} h$ ist für beliebiges $h \in \mathfrak{H}$ ein Ultrafilter in der schwach-kompakten Menge $\overline{\mathfrak{G}} h$, ist also schwach-konvergent. Die Konvergenz findet offenbar gleichmäßig für endlich viele $h \in \mathfrak{H}$ statt. Durch die Festsetzung

$$\bar{x} h = \lim \overline{F} h$$

ist also eine Transformation $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ erklärt, die in $\mathfrak{H}_0$ offensichtlich die Transformation $\bar{x}_0$ induziert.

Die Bedeutung von $\overline{\mathfrak{G}}$ für unsere Untersuchung ergibt sich aus dem

Satz III.1.2. *1. Der Aufspaltungssatz I ist für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ dann und nur dann richtig, wenn er für $\mathfrak{H}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ richtig ist. 2. Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, wenn er fastperiodisch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ ist. 3. Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$, wenn er ein Fluchtvektor unter $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, d. h. wenn es ein $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{x} h = 0$ gibt. 4. Ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$, d. h. sind alle Vektoren aus $\mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, so ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine Gruppe.*

Beweis. Die Aussage Nr. 1 folgt aus Nr. 2 und Nr. 3. Die Aussage Nr. 4 folgt aus Satz II.1.6 (man benütze die Tatsache, daß innerhalb totalbeschränkter Mengen die schwache Topologie zur starken Topologie äquivalent ist). Die Richtigkeit der Aussage Nr. 3 ist aus Satz III.1.1 unmittelbar zu ersehen. Nun beweisen wir die Aussage Nr. 2.

a) Sei $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$. Dann folgt zunächst: $\overline{\mathfrak{G}} h$ ist eine totalbeschränkte Menge. Aus der bereits bewiesenen Aussage Nr. 4 und aus Satz II.1.3 folgt dann, daß h fastperiodisch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ ist.

b) Sei $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ und sei $\{\overline{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n\}$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$. Setzt man $\mathfrak{A}_\nu = \overline{\mathfrak{A}}_\nu \cap \mathfrak{G}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, so sieht man unmittelbar, daß $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$ eine Teilung $\mathfrak{T}\{h; \varepsilon\}$ von $\mathfrak{G}$ ist. q.e.d.

§2. Reversible Vektoren. Formulierung des Aufspaltungssatzes II

Wir benützen eine in Satz II.1.4 festgestellte Eigenschaft der fastperiodischen Vektoren, um eine neue Klasse von Vektoren zu definieren. Es wird sich herausstellen, daß unter den von uns gemachten Annahmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die fastperiodischen Vektoren bereits durch diese Eigenschaft charakterisiert sind.

Sei h ein beliebiger Vektor aus $\mathfrak{H}$. Wir betrachten die schwache Hülle $\mathfrak{G}(h)$ der Bahn $\mathfrak{G}h$. Ist $g \in \mathfrak{G}(h)$, so ist $\mathfrak{G}(g) \subseteq \mathfrak{G}(h)$. Dabei gilt nicht allgemein das Gleichheitszeichen; ist z. B. h ein von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedener Fluchtvektor, so können wir $g = 0$ wählen und haben dann $h \notin \mathfrak{G}(g) = \{0\}$.

Definition III.2. *Ein Vektor $r \in \mathfrak{H}$ heißt reversibel unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$, wenn*

$$\mathfrak{G}(g) = \mathfrak{G}(r) \quad \text{für jedes } g \in \mathfrak{G}(r)$$

gilt. Die Menge aller reversiblen Vektoren $r \in \mathfrak{H}$ heiße $\mathfrak{R}$.

Man sieht unmittelbar: Die Menge $\mathfrak{R}$ ist eine invariante Teilmenge von $\mathfrak{H}$; sie enthält mindestens den Vektor $0 \in \mathfrak{H}$; sie enthält keinen von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedenen Fluchtvektor; hieraus und aus Beispiel 1 folgt, daß im allgemeinen auch nicht-reversible Vektoren in $\mathfrak{H}$ auftreten.

Der Begriff „reversibel" läßt sich mittels der schwachen Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ sehr einfach ausdrücken: Ein Vektor $r \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann reversibel unter $\mathfrak{G}$, wenn es zu jedem $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{y}\,\bar{x}\,r = r$ gibt, d. h. wenn sich $\overline{\mathfrak{G}}$ bezüglich h wie eine *Gruppe* verhält (Existenz der Inversen). Mittels des Abzählbarkeitssatzes I.5 kann man das noch anders ausdrücken: Ein Vektor $r \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann reversibel unter $\mathfrak{G}$, wenn folgendes gilt: Ist $x_1, x_2, \ldots \in \mathfrak{G}$ eine Folge, derart, daß

$$x_\nu r \to g \quad \text{(schwach)}$$

gilt, so gibt es eine Folge $y_\mu \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$y_\mu g \to r \quad \text{(schwach)}$$

gilt. Die Bezeichnung „reversibel" erscheint auf diese Weise gerechtfertigt.

Beachtet man, daß in einer totalbeschränkten Menge jede schwach-konvergente Folge automatisch stark-konvergent ist, so ergibt sich aus Satz II.1.4 unmittelbar der

Satz III.2.1. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter der abelschen Halbgruppe $\mathfrak{G}$, wenn er reversibel ist und wenn seine Bahn $\mathfrak{G}h$ totalbeschränkt ist.*

Es wird sich herausstellen, daß unter den von uns gemachten Annahmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jeder reversible Vektor automatisch fastperiodisch ist.

In diesem Kapitel beweisen wir den

Satz III.2.2 (Aufspaltungssatz II). *$\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$. Es gilt $\mathfrak{H} = \mathfrak{R} + \mathfrak{F}$, $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$, genauer: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Darstellung*

$$h = r + f, \qquad r \in \mathfrak{R}, \qquad f \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten r, f von h hängen linear, stetig und invariant von h ab.

Einige Teilaussagen dieses Satzes kann man unmittelbar einsehen. Daß $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$ ist, haben wir vorhin bereits erwähnt. Aus der *Kommutativität* von $\overline{\mathfrak{G}}$ ergibt sich: $\mathfrak{F}$ *ist eine lineare Teilmannigfaltigkeit von* $\mathfrak{H}$; denn seien $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}$ beliebig gewählt, und $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \overline{\mathfrak{G}}$ derart bestimmt, daß $\bar{x}_1 f_1 = 0$, $\bar{x}_2 f_2 = 0$ gilt. Dann ist für beliebige komplexe Zahlen α_1, α_2:

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_1 f_1) + \alpha_2 \bar{x}_1 (\bar{x}_2 f_2) = 0.$$

Also ist $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathfrak{F}$. In § 4 wird sich die lineare Abgeschlossenheit von $\mathfrak{F}$ von neuem ergeben.

§3. Beweis der Existenzaussage des Aufspaltungssatzes II. Ein Beweis des Fixpunktsatzes

Satz III.3.1. *Jeder Vektor* $h \in \mathfrak{H}$ *besitzt mindestens eine Darstellung*

$$h = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}$$

mit $r \in \mathfrak{G}(h)$.

Beweis. Offenbar genügt es, in $\mathfrak{G}(h)$ einen Vektor $r \in \mathfrak{R}$ zu finden, derart, daß für geeignetes $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$

$$\bar{x}(h - r) = 0$$

gilt. — Wir betrachten das System Σ aller Mengen der Gestalt $\mathfrak{G}(g)$ mit $g \in \mathfrak{G}(h)$. Jede dieser Mengen ist invariant und schwach-abgeschlossen. Σ ist halbgeordnet bezüglich mengentheoretischer Inklusion. Nach Satz I.4 gibt es zu jedem vollständig geordneten Teilsystem von Σ eine untere Schranke innerhalb des Systems Σ. Also gibt es nach dem Zornschen Lemma (Bourbaki [8], S. 37) ein *absolut minimales Element in* Σ, also ein $s \in \mathfrak{G}(h)$, derart, daß $\mathfrak{G}(g) = \mathfrak{G}(s)$ für jedes $g \in \mathfrak{G}(s)$ gilt; s ist also ein reversibler Vektor. Nach Satz III.1.1 (Aussage Nr. 2) gibt es eine Transformation $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit

$$\bar{x} h = s.$$

Sei $\bar{x} s = g$. Wegen $s \in \mathfrak{R}$ gibt es ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{y} g = s$. Setzt man $r = \bar{y} s$, so ist offenbar $\bar{\bar{x}} r = s$ und $r \in \mathfrak{R}$, $r \in \mathfrak{G}(h)$. Es gilt nun

$$\bar{x}(h - r) = s - s = 0. \qquad \text{q.e.d.}$$

Die beim Beweis des Satzes III.3.1 verwendete Methode läßt sich zum Beweis des in der Einleitung formulierten *Fixpunktsatzes* verwenden. Wir beweisen: *Ist* h *ein beliebiger Vektor aus* $\mathfrak{H}$, *so enthält die konvexe, stark-abgeschlossene Hülle* $\mathfrak{K}(h)$ *von* $\mathfrak{G}h$ *genau einen unter* $\mathfrak{G}$ *invarianten Punkt* h_0.

Hierzu bilden wir zunächst die konvexe Hülle $\mathfrak{K} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, x_i \in \mathfrak{G}, i = 1, \ldots, n \right\}$ von $\mathfrak{G}$. Die schwache Hülle $\overline{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ ist eine konvexe abelsche Halbgruppe von linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$, mit der Schranke Γ. Stets ist $\overline{\mathfrak{K}} h = \mathfrak{K}(h)$. Der Fixpunktsatz ist äquivalent zu der Aussage: *Für jedes* $h \in \mathfrak{H}$ *enthält* $\overline{\mathfrak{K}} h$ *genau einen unter der Halbgruppe* $\overline{\mathfrak{K}}$ *fixen Punkt* h_0. Wir beweisen nun diese Aussage.

Nach Satz III.3.1 gibt es in $\overline{\mathfrak{R}}h$ einen unter $\overline{\mathfrak{R}}$ *reversiblen* Vektor h_0. Wir zeigen, daß h_0 unter $\overline{\mathfrak{R}}$ *fix* ist. Sei $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{R}}$ beliebig gewählt. Für jedes $g \in \overline{\mathfrak{R}}h_0$ gilt

$$|\bar{a}h_0 - h_0| \leq \Gamma |\bar{a}g - g|.$$

Denn wegen der Reversibilität von h_0 gibt es zu jedem $g \in \overline{\mathfrak{R}}h_0$ ein $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{R}}$ mit $h_0 = \bar{x}g$. Somit ist

$$|\bar{a}h_0 - h_0| = |\bar{a}\bar{x}g - \bar{x}g| = |\bar{x}(\bar{a}g - g)| \leq \Gamma |\bar{a}g - g|.$$

Setzen wir speziell $g = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} (\bar{a})^\nu h_0$ mit beliebigem $n > 0$ ($\overline{\mathfrak{R}}$ ist konvex!), so folgt

$$|\bar{a}g - g| \leq \frac{2}{n}\Gamma |h_0|$$

und somit

$$|\bar{a}h_0 - h_0| \leq \frac{2}{n}\Gamma^2 |h_0|.$$

Da n beliebig war, ist $\bar{a}h_0 = h_0$.

h_0 ist also fix unter $\overline{\mathfrak{R}}$. Sei h_1 ein weiterer Fixpunkt in $\overline{\mathfrak{R}}h$. Für passende $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in \overline{\mathfrak{R}}$ gilt jedenfalls

$$\bar{x}_0 h = h_0, \quad \bar{x}_1 h = h_1.$$

Daraus folgt

$$h_0 = \bar{x}_0 h = \bar{x}_1 x_0 h = \bar{x}_0 \bar{x}_1 h = \bar{x}_1 h = h_1.$$

§4. Beweis der Eindeutigkeitsaussage des Aufspaltungssatzes II

Um die Eindeutigkeitsaussage des Aufspaltungssatzes II zu beweisen, machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß für den dualen Raum $\mathfrak{H}'$ und die in ihm definierte zur Halbgruppe $\mathfrak{G}$ duale Halbgruppe $\mathfrak{G}'$ ebenfalls die Annahmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelten.

Die zur Halbgruppe $\mathfrak{G}$ duale Halbgruppe $\mathfrak{G}'$ ist dabei folgendermaßen erklärt. Ist x eine beschränkte lineare Transformation in $\mathfrak{H}$, so gibt es genau eine beschränkte lineare Transformation x' in $\mathfrak{H}'$, derart, daß

$$(xh, g') = (h, x'g') \quad \text{für beliebige} \quad h \in \mathfrak{H}, \quad g' \in \mathfrak{H}'$$

gilt. x' wird die zu x duale Transformation genannt. Durchläuft x die beschränkte abelsche Halbgruppe $\mathfrak{G}$, so durchläuft x' ebenfalls eine abelsche (zu $\mathfrak{G}$ isomorphe) Halbgruppe $\mathfrak{G}'$, welche die zur Halbgruppe $\mathfrak{G}$ duale Halbgruppe genannt wird und ebenfalls beschränkt — mit derselben Schranke Γ wie $\mathfrak{G}$ — ist. Die zur Halbgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ duale Halbgruppe $(\overline{\mathfrak{G}})'$ ist $\overline{(\mathfrak{G}')}$, die schwache Hülle von $\mathfrak{G}'$. $\mathfrak{G}$ ist die zu $\mathfrak{G}'$ duale Halbgruppe.

Für $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G}'$ gilt die *Existenzaussage des Aufspaltungssatzes II: Es sei $\mathfrak{R}'$ die Menge der unter $\mathfrak{G}'$ reversiblen Vektoren $r' \in \mathfrak{H}'$; es sei $\mathfrak{F}'$ die Menge der Fluchtvektoren $f' \in \mathfrak{H}'$ bezüglich $\mathfrak{G}'$. Dann besitzt jeder Vektor $h' \in \mathfrak{H}'$ mindestens eine Darstellung*

$$h' = r' + f', \quad r' \in \mathfrak{R}', \quad f' \in \mathfrak{F}'$$

mit $r' \in \mathfrak{G}'(h')$.

Ferner benützen wir die bereits bewiesenen Aussagen:

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}, \quad \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{F}' = \{0'\}.$$

Wir untersuchen nun die Beziehungen zwischen den Mengen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{F}'$.

Satz III.4.1. *Ist $r \in \mathfrak{R}$ und $f' \in \mathfrak{F}'$, so gilt $(r, f') = 0$. Ist $r' \in \mathfrak{R}'$ und $f \in \mathfrak{F}$, so gilt $(f, r') = 0$.*

Beweis. Sei $r \in \mathfrak{R}$, $f' \in \mathfrak{F}'$ und etwa $\bar{x}' f' = 0$. Dann gibt es ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ mit

$$\bar{y}\,\bar{x}\,r = r.$$

Somit ist

$$(r, f') = (\bar{y}\,\bar{x}\,r, f') = (\bar{y}\,r, \bar{x}'\,f') = 0.$$

Der Beweis für die andere Hälfte des Satzes erfolgt analog.

Satz III.4.2. *Die Menge $\mathfrak{F}$ aller Fluchtvektoren in $\mathfrak{H}$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{F}$ besteht genau aus allen Vektoren $f \in \mathfrak{H}$, welche*

(1) $$(f, r') = 0 \quad \textit{für alle} \quad r' \in \mathfrak{R}'$$

erfüllen. — Die Menge $\mathfrak{F}'$ aller Fluchtvektoren in $\mathfrak{H}'$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}'$. $\mathfrak{F}'$ besteht genau aus allen Vektoren $f' \in \mathfrak{H}'$, welche

$$(r, f') = 0 \quad \textit{für alle} \quad r \in \mathfrak{R}$$

erfüllen.

Beweis. Wir beweisen nur die erste Hälfte des Satzes. Der Beweis für die andere Hälfte erfolgt analog.

Wir zeigen zunächst, daß jeder Vektor $f \in \mathfrak{H}$, welcher (1) erfüllt, in $\mathfrak{F}$ liegt. Aus der Invarianz von $\mathfrak{R}'$ folgen dann die restlichen Aussagen.

Sei $f_0 \in \mathfrak{H}$ derart, daß $(f_0, r') = 0$ für alle $r' \in \mathfrak{R}'$ gilt. Nach Satz III.3.1 besitzt f_0 eine Darstellung

$$f_0 = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Für jedes $r' \in \mathfrak{R}'$ gilt

$$(r, r') = (f_0, r') - (f, r') = 0$$

nach der Voraussetzung und nach Satz III.4.1. Nach Satz III.4.1 gilt aber auch

$$(r, f') = 0 \quad \text{für jedes} \quad f' \in \mathfrak{F}'.$$

Da nach Satz III.3.1 $\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}' + \mathfrak{F}'$ gilt, ist

$$(r, h') = 0 \quad \text{für jedes} \quad h' \in \mathfrak{H}',$$

also $r = 0$. Es ist somit $f_0 = f \in \mathfrak{F}$. Hieraus und aus Satz III.4.1 ergibt sich, daß die Vektoren $f \in \mathfrak{F}$ durch die Bedingung (1) gekennzeichnet sind. Daraus folgt: $\mathfrak{F}$ ist ein Teilraum von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{F}$ ist aber auch invariant unter $\mathfrak{G}$. Denn seien $f \in \mathfrak{F}$ und $x \in \mathfrak{G}$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$(xf, r') = (f, x'\,r') = 0 \quad \text{für jedes} \quad r' \in \mathfrak{R}'$$

wegen der $\mathfrak{G}'$-Invarianz von $\mathfrak{R}'$ (vgl. die Bemerkung nach der Definition III.2). Es ist also $xf \in \mathfrak{F}$. q. e. d.

Satz III.4.3. *Die Menge $\mathfrak{R}$ aller reversiblen Vektoren in $\mathfrak{H}$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{R}$ besteht genau aus allen Vektoern $r \in \mathfrak{H}$, welche*

$$(r, f') = 0 \quad \text{für alle} \quad f' \in \mathfrak{F}' \tag{2}$$

erfüllen. — Die Menge $\mathfrak{R}'$ aller reversiblen Vektoren r' in $\mathfrak{H}'$ ist ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}'$. $\mathfrak{R}'$ besteht genau aus allen Vektoren $r' \in \mathfrak{G}'$, welche

$$(f, r') = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{F}$$

erfüllen.

Beweis. Wir beweisen nur die erste Hälfte des Satzes. Der Beweis für die andere Hälfte erfolgt analog.

Es genügt, zu beweisen, daß jeder Vektor $r \in \mathfrak{H}$, welcher (2) erfüllt, in $\mathfrak{R}$ liegt; aus der Invarianz von $\mathfrak{F}'$ (Satz III.4.2) und aus Satz III.4.1 folgen dann die restlichen Aussagen.

Sei $r_0 \in \mathfrak{H}$ derart, daß $(r_0, f') = 0$ für alle $f' \in \mathfrak{F}'$ gilt. Nach Satz III.3.1 besitzt r_0 eine Darstellung

$$r_0 = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Für jedes $f' \in \mathfrak{F}'$ gilt

$$(f, f') = (r_0, f') - (r, f') = 0$$

nach der Voraussetzung und nach Satz III.4.1. Nach Satz III.4.1 gilt aber auch

$$(f, r') = 0 \quad \text{für jedes} \quad r' \in \mathfrak{R}'.$$

Da nach Satz III.3.1 $\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}' + \mathfrak{F}'$ gilt, ist

$$(f, h') = 0 \quad \text{für jedes} \quad h' \in \mathfrak{H}',$$

also $f = 0$. Es ist also $r_0 = r \in \mathfrak{R}$.

Nunmehr ergeben sich sämtliche Aussagen des Aufspaltungssatzes II ohne Schwierigkeit.

Beweis des Aufspaltungssatzes II.

Es sind noch folgende Aussagen zu beweisen:

1. Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ besitzt höchstens eine Darstellung der Gestalt

$$h = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}. \tag{3}$$

Denn es sei

$$h = r_0 + f_0, \quad r_0 \in \mathfrak{R}, \quad f_0 \in \mathfrak{F}$$

eine zweite Darstellung. Dann gilt

$$r - r_0 = f_0 - f.$$

Nach Satz III.4.3 ist $r - r_0 \in \mathfrak{R}$, nach Satz III.4.2 ist $f_0 - f \in \mathfrak{F}$, also ist

$$r - r_0 = f_0 - f \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{F}$$

und somit $r - r_0 = f_0 - f = 0$ wegen $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$, d. h. $r_0 = r$, $f_0 = f$.

2. Gilt $h_i = r_i + f_i$, $r_i \in \mathfrak{R}$, $f_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, \ldots, n)$, und sind α_i $(i = 1, \ldots, n)$ beliebige komplexe Zahlen, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i \in \mathfrak{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in \mathfrak{F},$$

also hängen die Komponenten der Zerlegung (3) *linear von h ab.*

3. In der eindeutig bestimmten, für jedes $h \in \mathfrak{H}$ vorhandenen Darstellung (3) ist nach Satz III.3.1 stets $r \in \mathfrak{G}(h)$. Daraus folgt $|r| \leqq \Gamma |h|$. r hängt also an der Stelle $h = 0$ stetig von h ab. Also hängt auch f an der Stelle $h = 0$ stetig von h ab. Aus Linearitätsgründen (Nr. 2) *hängen* also *die Komponenten r, f an jeder Stelle h in* $\mathfrak{H}$ *stetig von h ab.*

4. Gilt

$$h = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}$$

und ist $x \in \mathfrak{G}$ beliebig, so gilt

$$xh = xr + xf, \quad xr \in \mathfrak{R}, \quad xf \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten r, f hängen also *invariant von h ab.*

Damit ist der Aufspaltungssatz II vollständig bewiesen.

§ 5. Untersuchung des Raumes $\mathfrak{R}$. Einbettung der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ in eine Gruppe. Beweis des Aufspaltungssatzes I in Spezialfällen

Aus dem Satz III.2.1 folgt ohne weiteres: $\mathfrak{P} \subseteqq \mathfrak{R}$. Wenn man zeigen kann, daß $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$ gilt, d. h. daß *jeder reversible Vektor automatisch fastperiodisch* ist, so folgt der Aufspaltungssatz I unmittelbar aus dem Aufspaltungssatz II. Wir haben also nur noch den invarianten Teilraum $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{H}$ näher zu untersuchen.

Wir können zu diesem Zweck — auf Grund der Aussage Nr. 4 des Satzes III.1.1 — jederzeit annehmen, daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ *sei.*

Satz III.5.1. *Es sei* $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$. *Dann ist* $\overline{\mathfrak{G}}$ *eine Gruppe mit der Schranke* Γ.

Beweis. Es ist nur noch die Existenz der Inversen in $\overline{\mathfrak{G}}$ zu beweisen.

Wählt man zu $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$, $h \in \mathfrak{H}$ ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ derart, daß $\bar{y}\,\bar{x}\,h = h$ gilt, so hat man wegen der Kommutativität von $\overline{\mathfrak{G}}$ auch $\bar{y}\,\bar{x}\,h = h$. Hieraus entnimmt man: $\bar{x}\,\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ für jedes $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$. Überdies gilt

$$\frac{1}{\Gamma}|h| \leqq \frac{1}{\Gamma}|\bar{y}\,\bar{x}\,h| \leqq |\bar{x}\,h|. \tag{4}$$

Es ergibt sich:

Jedes $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ besitzt genau eine Inverse $\bar{x}^{-1}$; diese Transformation hat nach (4) stets die Schranke Γ. Um zu beweisen, daß aus $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ stets $\bar{x}^{-1} \in \overline{\mathfrak{G}}$ folgt, genügt es (wegen der schwachen Abgeschlossenheit von $\overline{\mathfrak{G}}$), folgendes zu zeigen: Ist n eine natürliche Zahl, und sind die Vektoren $h_1, \ldots, h_n \in \mathfrak{H}$ beliebig

gewählt, so gibt es zu jedem $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ ein $\bar{y} \in \overline{\mathfrak{G}}$ derart, daß

$$\bar{y}\,\bar{x}\,h_\nu = h_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt. Dies ergibt sich nun folgendermaßen.

Wir bilden die direkte Summe $\hat{\mathfrak{H}}$ von n Exemplaren des Raumes $\mathfrak{H}$. $\hat{\mathfrak{H}}$ besteht aus den sämtlichen formalen Ausdrücken der Gestalt $[g_1, \ldots, g_n]$, $(g_\nu \in \mathfrak{H})$, mit denen das lineare Rechnen komponentenweise vorzunehmen ist. Führt man als Norm etwa

$$|[g_1, \ldots, g_n]| = \sum_{\nu=1}^{n} |g_\nu|$$

ein, so ist $\hat{\mathfrak{H}}$ ein reflexiver Banachraum. Für beliebiges $x \in \overline{\mathfrak{G}}$ setzen wir

$$\hat{x}\,[g_1, \ldots, g_n] = [\bar{x}g_1, \ldots, \bar{x}g_n].$$

Die so definierten linearen Transformationen $\hat{x}$ in $\hat{\mathfrak{H}}$ durchlaufen eine abelsche Halbgruppe $\hat{\overline{\mathfrak{G}}}$ mit der Schranke Γ, wenn $\bar{x}$ die Halbgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ durchläuft. Man überzeugt sich leicht, daß $\hat{\overline{\mathfrak{G}}}$ schwach-abgeschlossen ist und daß jeder Vektor der Gestalt $[g_1, 0, \ldots, 0]$ oder $[0, g_2, 0, \ldots, 0]$ oder $[0, \ldots, 0, g_n]$ reversibel unter $\hat{\overline{\mathfrak{G}}}$ ist. Nun gilt für $\hat{\mathfrak{H}}$ und $\hat{\overline{\mathfrak{G}}}$ der Aufspaltungssatz II. Es folgt, daß alle Vektoren in $\overline{\mathfrak{H}}$ reversibel unter $\hat{\overline{\mathfrak{G}}}$ sind. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Mittels des soeben bewiesenen Satzes kann man für eine umfangreiche Klasse von Fällen den Aufspaltungssatz I dadurch beweisen, daß man *direkt* nachweist: *für jeden Vektor* $h \in \mathfrak{R}$ *ist die Bahn* $\mathfrak{G}h$ *totalbeschränkt, d. h.* $h \in \mathfrak{P}$.

Wie schon im Anschluß an Satz I.2 erwähnt wurde, ist jeder gleichmäßig-konvex (CLARKSON [*11*]) normierbare Banachraum reflexiv. Es gilt nun der

Satz III.5.2. *Sei* $\mathfrak{H}$ *ein gleichmäßig-konvex normierbarer Banachraum. Dann ist* $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}$.

Beweis. Eine Umnormierung von $\mathfrak{H}$ zerstört die Beschränktheit von $\mathfrak{G}$ nicht. Wir können daher gleich annehmen, daß die Norm $|h|$ gleichmäßig-konvex ist. Ferner können wir auf Grund des Aufspaltungssatzes II annehmen, daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ ist. Wir betrachten die schwach-abgeschlossene Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ in $\mathfrak{H}$. Wie ich in einer anderen Arbeit gezeigt habe, ist die Norm

$$||h|| = \sup_{\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}} |\bar{x}\,h|$$

wiederum gleichmäßig-konvex; sie ist *invariant* unter $\overline{\mathfrak{G}}$: stets gilt $||\bar{x}h|| = ||h||$ (JACOBS [*27*], S. 345 f.). Die invariante schwach-abgeschlossene Menge $\overline{\mathfrak{G}h}$ ist daher für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ihr eigener „*Minimalteil*" bezüglich dieser Norm ([*28*], S. 415) und somit — auf Grund der gleichmäßigen Konvexität dieser Norm — *totalbeschränkt* ([*28*], S. 415). Es ist also jeder Vektor $h \in \mathfrak{R}$ fastperiodisch unter $\overline{\mathfrak{G}}$, also auch (nach Satz III.1.2) fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, d. h. es ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}$. q. e. d.

Aus Satz III.4.1 und der später anzugebenden „schwachen" Kennzeichnung der fastperiodischen Vektoren (Satz IV.1.1) kann man folgern: Ist in $\mathfrak{H}'$ jeder reversible Vektor fastperiodisch, so ist auch in $\mathfrak{H}$ jeder reversible Vektor fastperiodisch und umgekehrt. Die Gleichung $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$ gilt daher nach Satz III.5.2 auch für Räume $\mathfrak{H}$, für welche $\mathfrak{H}'$ gleichmäßig-konvex normiert werden kann; Kennzeichnungen dieser Räume finden sich bei DAY [*14*] und NAKANO [*44*].

Wie DAY gezeigt hat, gibt es reflexive Banachräume, die sich nicht gleichmäßig-konvex normieren lassen (DAY [*12*]). Wir geben daher für den Aufspaltungssatz I einen Beweis an, welcher nicht von einer derartigen Eigenschaft Gebrauch macht.

Angenommen, der Aufspaltungssatz I ist unter der Annahme bewiesen, daß $\mathfrak{G}$ eine *Gruppe* sei. Wendet man ihn dann auf die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ im Raume $\mathfrak{R}$ an und beachtet man die Tatsache, daß kein von $0 \in \mathfrak{R}$ verschiedener Vektor ein Fluchtvektor bezüglich $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, so ergibt sich die Fastperiodizität aller Vektoren $r \in \mathfrak{R}$ bezüglich $\overline{\mathfrak{G}}$, also (nach Satz III.1.2) auch bezüglich $\mathfrak{G}$, d. h. wir haben dann $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$. Damit wird dann der Aufspaltungssatz I allgemein bewiesen sein.

Kap. IV. Beweis des Aufspaltungssatzes I

In diesem Kapitel soll der Beweis des Aufspaltungssatzes I unter der folgenden zusätzlichen Annahme durchgeführt werden:

Annahme $\mathfrak{C}$. *$\mathfrak{G}$ ist eine Gruppe.*

Nach der am Ende von Kap. III § 5 gemachten Bemerkung wird dann der Aufspaltungssatz I allgemein bewiesen sein.

Als Hilfsmittel benötigen wir den

Approximationssatz für fastperiodische Funktionen. *Ist $\varphi(x)$ eine fastperiodische Funktion auf der abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ (im Sinne von* v. NEUMANN-MAAK, vgl. MAAK [*36*], S. 26, 152), *so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlichviele Charaktere $\chi_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ von $\mathfrak{G}$ und komplexe Zahlen $\alpha_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ derart, daß*

$$\left| \varphi(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \chi_\nu(x) \right| < \varepsilon$$

identisch in $x \in \mathfrak{G}$ gilt (vgl. MAAK [*36*], S. 126, 18).

Dabei versteht man unter einem Charakter von $\mathfrak{G}$ eine komplexwertige auf $\mathfrak{G}$ erklärte Funktion $\chi(x)$, welche die Gleichungen

$$|\chi(x)| = 1, \quad \chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$$

für alle $x, y \in \mathfrak{G}$ erfüllt. Ein Charakter von $\mathfrak{G}$ ist stets fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$. Man kann einen *Charakter* von $\mathfrak{G}$ auch als *eindimensionale unitäre Darstellung* von $\mathfrak{G}$ auffassen (nach dem SCHURschen Lemma, vgl. MAAK [*36*], S. 17 f. sind alle irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen einer *abelschen* Gruppe *eindimensional*).

Außer dem Approximationssatz ziehen wir Teile der EBERLEINschen *Theorie der schwach-fastperiodischen Funktionen* auf abelschen Gruppen heran (Satz IV.1.2, Satz IV.2.2).

§1. Eine Kennzeichnung der fastperiodischen Vektoren und der Fluchtvektoren

Sowohl die fastperiodischen Vektoren als auch die Fluchtvektoren in $\mathfrak{H}$ lassen sich durch „schwache" Eigenschaften kennzeichnen.

Definition IV.1. *Eine beschränkte komplexwertige, auf der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *erklärte Funktion* $\varphi(x)$ *heißt ergodisch mit dem Mittelwert* $M_x\{\varphi(x)\} = \alpha$, *wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *endlichviele Elemente* $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ *gibt, derart, daß*

$$\left|\alpha - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x a_\nu)\right| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{G}$$

gilt (vgl. etwa MAAK [*39*], S. 36).

Beispielsweise ist jede fastperiodische Funktion ergodisch (MAAK [*39*], S. 41, 43). Es gibt aber im allgemeinen nicht-fastperiodische ergodische Funktionen (vgl. MAAK [*39*], S. 42; EBERLEIN [*22*], S. 233).

Man sieht leicht ein: Die auf der abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ergodischen Funktionen bilden einen linearen Raum; der Mittelwert $M_x\{\varphi(x)\}$ ist durch φ eindeutig bestimmt und hängt linear von φ ab; er ist ferner invariant, d. h. es gilt $M_x\{\varphi(xa) = M_x\{\varphi(x)\}$ für jedes $a \in \mathfrak{G}$; ferner ist $M_x\{\varphi(x)\} \leq \sup_x |\varphi(x)|$, d. h. $M\{\varphi\}$ hängt stetig (im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz) von φ ab.

Satz IV.1.1. *Ein Vektor* $h \in \mathfrak{H}$ *ist dann und nur dann fastperiodisch unter der Gruppe* $\mathfrak{G}$, *wenn für jedes* $g' \in \mathfrak{H}'$ *die auf* $\mathfrak{G}$ *erklärte komplexwertige Funktion*

$$\varphi(x) = (xh, g')$$

fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ (*im Sinne von* v. NEUMANN-MAAK, *vgl.* MAAK [*36*], S. 26, 152) *ist.*

Beweis. I. Sei $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$, und sei $g' \in \mathfrak{H}'$ beliebig. Aus der Totalbeschränktheit der Menge $\mathfrak{G}h$ ergibt sich unmittelbar, daß die Funktionenmenge $\{\varphi(xa) | a \in \mathfrak{G}\}$ im Sinne der Norm $|\varphi| = \sup_x |\varphi(x)|$ totalbeschränkt ist. Dies bedeutet aber definitionsgemäß (MAAK [*36*], S. 152), daß die Funktion $\varphi(x)$ fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ ist.

II. Sei $h \in \mathfrak{H}$ so beschaffen, daß für jedes $g' \in \mathfrak{H}'$ die Funktion $\varphi(x) = (xh, g')$ fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ ist.

Es sei $\chi(x)$ ein Charakter von $\mathfrak{G}$. Für jedes $g' \in \mathfrak{H}'$ und beliebiges $x \in \mathfrak{G}$ können wir den Mittelwert

$$M_t\{(xth, g')\,\chi(t)\} \tag{1}$$

bilden. Der Ausdruck (1) hängt offenbar linear und stetig von $g' \in \mathfrak{H}'$ ab; wegen der Reflexivität von $\mathfrak{H}$ läßt sich (1) also etwa für $x = e$ in der Gestalt

$$M_t\{(th, g')\,\chi(t)\} = (p, g')$$

mit geeignetem $p \in \mathfrak{H}$, darstellen. Es gilt nun für beliebiges $x \in \mathfrak{G}$:

$$\begin{aligned}(xp, g') = (p, x'g') &= M_t\{th, x'g')\,\chi(t)\}\\ &= M_t\{(xth, g')\,\chi(t)\} = M_t\{(th, g')\,\chi(x^{-1}t)\}\\ &= \chi(x^{-1})\,M_t\{(th, g')\,\chi(t)\}\\ &= \chi(x^{-1})\,(p, g') = (\chi(x^{-1})\,p, g').\end{aligned}$$

Da $g' \in \mathfrak{H}'$ beliebig war, ist

$$xp = \chi(x^{-1})\,p \quad \text{für jedes} \quad x \in \mathfrak{G},$$

d. h. p erzeugt einen höchstens eindimensionalen invarianten Teilraum von $\mathfrak{H}$, hat somit sicher eine totalbeschränkte Bahn $\mathfrak{G}h$ und ist daher fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$ (Satz II.1.3.).

Wir zeigen nun, daß der Vektor h in der schwach-abgeschlossenen linearen Hülle des Systems aller eindimensionalen invarianten Teilräume von $\mathfrak{H}$ enthalten ist. Nach Satz I.1 ist h dann auch in der stark-abgeschlossenen Hülle desselben Systems enthalten und somit nach Satz II.1.1 ein fastperiodischer Vektor.

Sei also $\mathfrak{U} = \{g \mid |(g, g'_\varrho)| < \varepsilon, \varrho = 1, \ldots, r\}$ eine beliebige schwache Umgebung von $0 \in \mathfrak{H}$. Wir betrachten die fastperiodischen Funktionen (xh, g_ϱ) $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Man kann nun eine fastperiodische Funktion $\delta(x)$ auf $\mathfrak{G}$ bestimmen, derart, daß für jedes $\varrho = 1, \ldots, r$

$$|(xh, g'_\varrho) - M_t\{(xth, g'_\varrho)\,\delta(t)\}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gleichmäßig in $x \in \mathfrak{G}$ gilt (vgl. Maak [36], S. 54 f.). Sei etwa

$$|(xh, g'_\varrho)| < A \qquad (\varrho = 1, \ldots, r;\ x \in \mathfrak{G}).$$

Wir bestimmen endlichviele Charaktere $\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x)$ von $\mathfrak{G}$, sowie komplexe Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ derart, daß

$$\left|\delta(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \chi_\nu(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

gleichmäßig in $x \in \mathfrak{G}$ gilt. Offenbar ist dann

$$\left|(xh, g'_\varrho) - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu M_t\{(xth, g'_\varrho)\,\chi_\nu(t)\}\right| < \varepsilon.$$

Setzen wir

$$M_t\{(th, g')\,\chi_\nu(t)\} = (p_\nu, g') \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so ist $p_\nu \in \mathfrak{P}$. Wir haben also (für $x = e$)

$$\left|\left(h - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu p_\nu, g'_\varrho\right)\right| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, \ldots, r),$$

d. h.

$$h - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu p_\nu \in \mathfrak{U}$$

q. e. d.

Eine spezielle Klasse ergodischer Funktionen sind die *schwach-fastperiodischen Funktionen* von EBERLEIN ([22], S. 232 ff.). Aus der Arbeit von EBERLEIN entnehmen wir den

Satz IV.1.2. *Ist $h \in \mathfrak{H}$, $g' \in \mathfrak{H}'$, so ist die auf $\mathfrak{G}$ erklärte komplexwertige Funktion*

$$\varphi(x) = (xh, g')$$

schwach-fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ (im Sinne von EBERLEIN *[22], S. 232). Jede schwach-fastperiodische Funktion auf $\mathfrak{G}$ ist ergodisch ([22], S. 236). Die schwach-fastperiodischen Funktionen auf $\mathfrak{G}$ bilden einen linearen Raum. Das Produkt zweier schwach-fastperiodischer Funktionen ist wieder eine schwach-fastperiodische Funktion ([22], S. 234).*

Insbesondere sind die Funktionen $\varphi(x) = |(xh, g')|^2$ (mit fest gewählten $h \in \mathfrak{H}$, $g' \in \mathfrak{H}'$) stets ergodisch.

Satz IV.1.3. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$, wenn für jedes $g' \in \mathfrak{H}'$ die (stets ergodische!) Funktion*

$$\varphi(x) = |(xh, g')|^2$$

den Mittelwert 0 besitzt.

Beweis. I. Sei h ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$ und $g' \in \mathfrak{H}'$ beliebig gewählt. Sei α der Mittelwert der Funktion $\varphi(x) = |(xh, g')|^2$. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ bestimmen wir Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$\left| \alpha - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |(xa_\nu h, g')|^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{G} \tag{2}$$

gilt. Wegen $h \in \mathfrak{F}$ können wir $x \in \mathfrak{G}$ so wählen, daß

$$xh \in \mathfrak{U} = \left\{ g \,\middle|\, |(g, a'_\nu g')| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \qquad \nu = 1, \ldots, n \right\} \tag{3}$$

gilt. Aus (2) und (3) folgt $|\alpha| < \varepsilon$. Also ist $\alpha = 0$.

II. Sei $h \in \mathfrak{H}$ so beschaffen, daß für beliebiges $g' \in \mathfrak{H}'$

$$M_x\{|(xh, g')|^2\} = 0$$

gilt. Sei $\mathfrak{U} = \{g \mid |(g, g'_\varrho)| < \varepsilon,\ \varrho = 1, \ldots, r\}$ eine schwache Umgebung von $0 \in \mathfrak{H}$. Die Funktion $\sum_{\varrho=1}^{n} |(xh, g'_\varrho)|^2$ ist offenbar ergodisch mit dem Mittelwert 0. Wir wählen dementsprechend $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{r} |(xa_\nu h, g'_\varrho)|^2 < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{G}$$

gilt. Wir setzen $x = e$. Es ergibt sich, daß für mindestens ein ν

$$\sum_{\varrho=1}^{r} |(a_\nu h, g'_\varrho)|^2 < \varepsilon$$

sein muß. Daraus folgt unmittelbar $a_\nu h \in \mathfrak{U}$. Also ist $0 \in \mathfrak{G}(h)$, d. h. h ist ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$.

§2. Beweis des Aufspaltungssatzes I für Gruppen

In diesem Paragraphen soll der Aufspaltungssatz I unter Zugrundelegung der Annahmen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, also für beschränkte abelsche Gruppen in reflexiven Banachräumen, bewiesen werden. Der Aufspaltungssatz II wird dabei nicht benützt. Jedoch machen wir von einigen anderen früher bewiesenen Sätzen Gebrauch.

Satz IV.2.1. *a)* $\mathfrak{P}$ *ist ein invarianter Teilraum von* $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{P}'$ *ist ein invarianter Teilraum von* $\mathfrak{H}'$.

b) $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$, $\mathfrak{P}' \cap \mathfrak{F}' = \{0'\}$.

c) Ist $p \in \mathfrak{P}$, $f' \in \mathfrak{F}'$ $p' \in \mathfrak{P}'$, $f \in \mathfrak{F}$, *so gilt*

$(p, f') = 0$ $(f, p') = 0$.

Beweis. a) Siehe Satz II.1.1.

b) Siehe Satz II.2.1.

c) Nach Satz III.2.1 ist jeder fastperiodische Vektor reversibel, aus Satz III.4.1 folgt dann die Behauptung.

Aus der EBERLEINschen Theorie der schwach-fastperiodischen Funktionen übernehmen wir den

Satz IV.2.2. *Sind* f, g *Vektoren aus* $\mathfrak{H}$, h', k' *Vektoren aus* $\mathfrak{H}'$, *so ist die Funktion*

$$\varphi(x) = M_t\{(xtf, h')\,\overline{(tg, k')}\} \tag{4}$$

(der Mittelwert existiert stets nach Satz IV.1.2) fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ *(im Sinne von* v. NEUMANN-MAAK, *vgl.* MAAK [*36*], *S. 26, 152)* (EBERLEIN [*22*], S. 237).

Es gilt nun der

Satz IV.2.3. *Ist* $h \in \mathfrak{H}$, $h \notin \mathfrak{F}$, *so gibt es einen Vektor* $p' \in \mathfrak{P}'$ *mit* $(h, p') \neq 0$. *Ist* $h' \in \mathfrak{H}'$, $h' \notin \mathfrak{F}'$, *so gibt es einen Vektor* $p \in \mathfrak{P}$ *mit* $(p, h') \neq 0$.

Beweis. Sei $h \in \mathfrak{H}$, $h \notin \mathfrak{F}$. Nach Satz IV.1.3 gibt es dann einen Vektor $g' \in \mathfrak{H}'$ derart, daß

$$M_t\{|(th, g')|^2\} \neq 0$$

gilt. Wir betrachten für beliebiges $f \in \mathfrak{H}$ den Ausdruck

$$M_t\{(tf, g')\,\overline{(th, g')}\} = M(f).$$

Offenbar ist $M(f)$ eine stetige Linearform auf $\mathfrak{H}$. Es gibt also einen Vektor $p' \in \mathfrak{H}'$ derart, daß stets

$$M(f) = (f, p')$$

gilt. Wir betrachten für beliebig gewähltes $f \in \mathfrak{H}$ die auf $\mathfrak{G}'$ definierte komplexwertige Funktion

$$\begin{aligned}\varphi(x') &= (f, x'p') = (xf, p') \\ &= M_t\{(xtf, g')\,\overline{(th, g')}\}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nach Satz IV.2.2 fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$; daraus folgt, daß $\varphi(x')$ fastperiodisch auf $\mathfrak{G}'$ ist. Wenden wir Satz IV.1.1 auf $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G}'$

an, so folgt, daß $p' \in \mathfrak{P}'$ gilt. Es ist aber

$$(h, p') = M(h) = M_i\{|(th, g')|^2\} \neq 0.$$

Ganz analog beweist man die duale Aussage.

Nun führen wir den *Beweis des Aufspaltungssatzes I für Gruppen.*

1. *$\mathfrak{F}$ ist die Menge aller Vektoren $f \in \mathfrak{H}$, welche*

$$(f, p') = 0 \quad \textit{für jedes} \quad p' \in \mathfrak{P}' \tag{5}$$

erfüllen. — Daß alle Vektoren $f \in \mathfrak{F}$ die Bedingung erfüllen, wissen wir schon (Satz IV.2.1). Nach Satz IV.2.3 kann ein Vektor $h \notin \mathfrak{F}$ die Bedingung (5) nicht erfüllen. Ein (5) erfüllender Vektor liegt also stets in $\mathfrak{F}$.

2. *$\mathfrak{F}'$ ist die Menge aller Vektoren $f' \in \mathfrak{H}'$, welche*

$$(p, f') = 0 \quad \text{für jedes} \quad p \in \mathfrak{P} \tag{6}$$

erfüllen. — Beweis analog wie Nr. 1.

3. Wir haben nunmehr: *$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{F}'$ sind invariante Teilräume von $\mathfrak{H}'$.* — Für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ wissen wir dies bereits (Satz IV.2.1). Hieraus folgt mit Hilfe von Nr. 1 und 2 dieselbe Aussage für $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}$ (vgl. den Beweis von Satz III.4.2).

4. *$\mathfrak{P}$ ist die Menge aller Vektoren $p \in \mathfrak{H}$, welche*

$$(p, f') = 0 \quad \textit{für jedes} \quad f' \in \mathfrak{F}'$$

erfüllen. — Hierzu zeigt man zunächst mit Hilfe von Satz I.1 (MAZUR): Ist $h \in \mathfrak{H}$, $h \notin \mathfrak{P}$, so gibt es einen Vektor $f' \in \mathfrak{H}'$ derart, daß

$$(p, f') = 0 \quad \text{für alle} \quad p \in \mathfrak{P}, \tag{7}$$

aber

$$(h, f') \neq 0$$

gilt (vgl. BANACH [4], S. 57). Aus (7) folgt nach Nr. 2, daß $f' \in \mathfrak{F}'$ ist. Wenn

$$(p, f') = 0 \quad \text{für alle} \quad f' \in \mathfrak{F}'$$

gilt, so muß $p \in \mathfrak{P}$ sein. Dies ergibt mit Satz IV.2.1 zusammen die Behauptung.

5. *$\mathfrak{P}'$ ist die Menge aller Vektoren $p' \in \mathfrak{H}'$, welche*

$$(f, p') = 0 \quad \textit{für jedes} \quad f \in \mathfrak{F}$$

erfüllen. — Beweis analog wie Nr. 4.

6. *$\mathfrak{H}$ ist die lineare stark-abgeschlossene Hülle der Teilräume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$.* — Denn es sei $\mathfrak{H}_0$ die lineare stark-abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$. Angenommen, $\mathfrak{H}_0$ ist ein echter Teilraum von $\mathfrak{H}$. Aus Satz I.1 (MAZUR) folgert man dann leicht: Es gibt einen von $0' \in \mathfrak{H}'$ verschiedenen Vektor $h' \in \mathfrak{H}'$, welcher

$$(g, h') = 0 \quad \text{für jedes} \quad g \in \mathfrak{H}_0$$

erfüllt. Insbesondere gilt

$$(p, h') = 0 \quad \text{für jedes} \quad p \in \mathfrak{P},$$

also ist $h' \in \mathfrak{F}'$ nach Nr. 2. Es gilt ebenso

$$(f, h') = 0 \quad \text{für jedes} \quad f \in \mathfrak{F},$$

also ist $h' \in \mathfrak{P}'$ nach Nr. 5. Es ist somit $h' \in \mathfrak{P}' \cap \mathfrak{F}' = \{0'\}$ (Satz IV.2.1), also $h' = 0'$. Widerspruch. Somit ist $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$.

7. *Ist* $h = p + f$, $p \in \mathfrak{P}$, $f \in \mathfrak{F}$, *so gilt* $|f| \leq (1 + \Gamma^2)|h|$. — Zunächst folgt aus der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{G}$, daß

$$|xg| \geq \frac{1}{\Gamma}|g| \tag{8}$$

für beliebiges $g \in \mathfrak{H}$ und beliebiges $x \in \mathfrak{G}$ gilt (man setze $g = x^{-1}h$ mit passendem $h \in \mathfrak{H}$). Nun sei x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine Folge aus $\mathfrak{G}$, für welche

$$x_\nu f \to 0 \quad \text{(schwach)}$$

gilt; wegen $f \in \mathfrak{F}$ kann man nach dem Abzählbarkeitssatz I.5 stets eine solche Folge finden. Wegen der Totalbeschränktheit der Bahn $\mathfrak{G}p$ können wir gleich annehmen (Teilfolge!), daß die Folge $x_\nu p$ stark konvergiert; es sei etwa

$$x_\nu p \to p_0 \quad \text{(stark)}.$$

Dann ist $x_\nu h \to p_0$ (schwach), also gewiß $|p_0| \leq \Gamma |h|$. Aus (8) folgt

$$|p_0| \geq \frac{1}{\Gamma}|p|.$$

Wir haben nun

$$|p| \leq \Gamma |p_0| \leq \Gamma^2 |h|.$$

Daraus folgt

$$|f| \leq |h| + |p| \leq (1 + \Gamma^2)|h|.$$

8. *Jeder Vektor* $h \in \mathfrak{H}$ *besitzt eine Darstellung*

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad f \in \mathfrak{F}. \tag{9}$$

Denn es sei $h \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt. Nach Nr. 6 gibt es in $\mathfrak{P} + \mathfrak{F}$ eine Folge $h_\nu (\nu = 1, \ldots)$ mit

$$h_\nu \to h \quad \text{(stark)}. \tag{10}$$

Die Folge h_ν ist jedenfalls beschränkt. Sei etwa

$$|h_\nu| \leq A \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Ferner sei

$$h_\nu = p_\nu + f_\nu, \quad p_\nu \in \mathfrak{P}, \quad f_\nu \in \mathfrak{F} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Dann gilt nach Nr. 7 und (11)

$$|f_\nu| \leq (1 + \Gamma^2) A.$$

Nach Satz I.7 können wir annehmen (Teilfolge!), daß die Folge f_ν schwach konvergiert. Sei etwa

$$f_\nu \to f \quad \text{(schwach)}. \tag{12}$$

Nach Nr. 1 und Satz I.1 ist dann $f \in \mathfrak{F}$. Aus (10) und (12) folgt, daß auch die Folge p_ν schwach konvergiert. Sei etwa

$$p_\nu \to p \quad \text{(schwach)}. \tag{13}$$

Nach Satz IV.2.1 und Satz I.1 ist dann $p \in \mathfrak{P}$. Aus (12) und (13) folgt (9).

9. Aus Nr. 3 und aus $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$ folgt, *daß die Zerlegung* (9) *stets eindeutig durch h bestimmt ist* (vgl. Nr. 1 des Beweises für den Aufspaltungssatz II in Kap. III § 4), ferner, *daß die Komponenten p, f linear und invariant von h abhängen.* Aus Nr. 7 folgt, *daß die Komponenten p, f stetig von h abhängen.*

Damit ist der Aufspaltungssatz I vollständig bewiesen.

Anmerkung. Der in Nr. 6 verwendete Beweisgedanke ist von LORCH zum Beweis des Fixpunktsatzes verwendet worden (LORCH [*35*]; RIESZ-NAGY [*54*], S. 400).

Anmerkung. Man zeigt leicht: $\overline{\mathfrak{G}}$ enthält eine Projektion $\bar{t}$ des Raumes $\mathfrak{H}$ auf den Teilraum $\mathfrak{P}$, derart, daß $\bar{t}h$ für jedes $h \in \mathfrak{H}$ gleich der fastperiodischen Komponente (im Sinne des Aufspaltungssatzes I) von h ist. Es gilt also $\bar{t}^2 = \bar{t}$. Die duale Transformation $\bar{t}'$ leistet dieselben Dienste in bezug auf $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G}'$. Ferner existiert eine mit allen Transformationen aus $\mathfrak{G}$ vertauschbare Projektion F des Raumes $\mathfrak{H}$ auf den Teilraum $\mathfrak{F}$: Für jedes $h \in \mathfrak{H}$ ist Fh die Fluchtkomponente von h (im Sinne des Aufspaltungssatzes I); $F^2 = F$. F besitzt die Schranke $\Gamma + 1$. Die duale Transformation F' leistet dieselben Dienste in bezug auf $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G}'$.

Anmerkung. Nach Nr. 8 und nach den Sätzen IV.1.1 und IV.1.2 ist für beliebige $h \in \mathfrak{H}$, $g' \in \mathfrak{H}'$ die Funktion $\varphi(x) = (xh, g')$ ω-fastperiodisch im Sinne von MAAK [*39*].

Anhang I. Verallgemeinerung auf reflexive lokalkonvexe topologische Vektorräume

Die in Kap. I—IV entwickelten Methoden lassen sich verallgemeinern. Man kann den Aufspaltungssatz I auch für *gleichmäßig-stetige abelsche Halbgruppen in reflexiven lokalkonvexen topologischen Vektorräumen* $\mathfrak{H}$ beweisen. Die hierzu nötigen Überlegungen sollen kurz skizziert werden.

Es sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum (HYERS [*26*]; BOURBAKI [*10*], S. 57). Die in $\mathfrak{H}$ vorgegebene Topologie heiße die starke Topologie in $\mathfrak{H}$. Wir setzen $\mathfrak{H}$ stets als separiert voraus (BOURBAKI [*10*], S. 3).

Eine Menge $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ heißt *beschränkt* in $\mathfrak{H}$, wenn es zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von $0 \in \mathfrak{H}$ eine reelle Zahl $\alpha > 0$ gibt, für welche

$$\alpha \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}$$

gilt.

Der duale Raum $\mathfrak{H}' = \{h', g', f', \ldots\}$ von $\mathfrak{H}$ besteht aus allen stetigen Linearformen auf $\mathfrak{H}$. Wir benützen wieder die im Kap. I eingeführten Bezeichnungen. Eine *Basis der „starken" Topologie in* $\mathfrak{H}'$ an der Stelle $0' \in \mathfrak{H}'$ wird durch die sämtlichen Mengen der Gestalt

$$\mathfrak{U}' = \{h' \mid |(g, h')| \leq 1, \quad g \in \mathfrak{B}\}$$

gebildet, wobei $\mathfrak{B}$ eine beliebige beschränkte Menge in $\mathfrak{H}$ ist. Man bildet analog wie vorhin den Begriff „beschränkte Menge in $\mathfrak{H}'$".

Der Raum $\mathfrak{H}'$ ist nun ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum geworden. Wir können zum Raum $\mathfrak{H}'$ wieder den dualen Raum $\mathfrak{H}''$ bilden. Der Raum $\mathfrak{H}$ kann stets auf eindeutige Weise in den Raum $\mathfrak{H}''$ eingebettet, d. h. jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ kann als stetige Linearform auf dem Raum $\mathfrak{H}'$ aufgefaßt werden. Die von $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ nach der obigen Vorschrift induzierte „starke" Topologie ist jedoch im allgemeinen von der in $\mathfrak{H}$ ursprünglich gegebenen starken Topologie verschieden.

Der Raum $\mathfrak{H}$ heißt *semi-reflexiv*, wenn bei der obigen Einbettung $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}''$ gilt, d. h. wenn jede stetige Linearform auf $\mathfrak{H}'$ durch einen Vektor $h \in \mathfrak{H}$ repräsentiert werden kann. Ist außerdem die von $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ induzierte „starke" Topologie gleich der ursprünglichen in $\mathfrak{H}$ vorgegebenen starken Topologie, so heißt $\mathfrak{H}$ *reflexiv*. Mit $\mathfrak{H}$ ist auch $\mathfrak{H}'$ reflexiv.

Besonders angenehme Dualitätseigenschaften haben die $(\mathfrak{F})$- und $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$-Räume (vgl. Dieudonné-Schwartz [*16*]) und ihre dualen Räume. Beispielsweise ist der Raum der Schwartzschen Distributionen der duale Raum eines reflexiven $(\mathfrak{L}\mathfrak{N})$-Raumes (Schwartz [*55*], S. 24; Dieudonné-Schwartz [*16*], S. 75). Die gestuften Räume von Köthe [*33*] sind spezielle $(\mathfrak{N})$-Räume (Dieudonné-Schwartz [*16*], S. 65 f.).

Nun machen wir die

Annahme $\mathfrak{A}^*$. *$\mathfrak{H}$ ist ein reflexiver lokalkonvexer topologischer Vektorraum.*

Wir betrachten in $\mathfrak{H}$ die von $\mathfrak{H}'$ induzierte schwache Topologie, und in $\mathfrak{H}'$ die von $\mathfrak{H}$ induzierte schwache Topologie. Es gilt sowohl in $\mathfrak{H}$ wie in $\mathfrak{H}'$ der Satz I.1 (vgl. Bourbaki [*10*], S. 73).

Ferner gilt: Jede beschränkte schwach-abgeschlossene Menge in $\mathfrak{H}$ ist schwach-kompakt (im Sinne von Bourbaki [*9*], S. 45); eine Menge $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn für jede beschränkte Menge $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{H}'$ die Zahlenmenge $\{(g, g') \mid g \in \mathfrak{B}, g' \in \mathfrak{B}'\}$ beschränkt ist. Dasselbe gilt für den ebenfalls reflexiven Raum $\mathfrak{H}'$. Man kann nun die Sätze I.3 und I.4 für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ beweisen. In $(\mathfrak{F})$- bzw. $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$-Räumen gilt überdies der Abzählbarkeitssatz I.5 ([*16*], S. 88).

In $\mathfrak{H}$ wirke eine abelsche Halbgruppe $\mathfrak{G}$ von stetigen linearen Transformationen $x, y, \ldots$. An die Stelle der Annahme $\mathfrak{B}$ tritt nun die

Annahme $\mathfrak{B}^*$. *Ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ eine beschränkte Menge, so ist auch $\mathfrak{G}\mathfrak{B}$ eine beschränkte Menge in $\mathfrak{H}$.*

Diese Annahme ist dann und nur dann erfüllt, wenn $\mathfrak{G}$ *gleichmäßig-stetig* ist, d. h. wenn es zu jeder 0-Umgebung $\mathfrak{U}$ eine 0-Umgebung $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{G}\,\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{U}$ gibt.

Gilt die Annahme $\mathfrak{B}^*$ für $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$, so gilt sie von selbst auch für die duale Halbgruppe $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{H}'$.

Man kann nun die schwache Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ bilden und zeigen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ eine abelsche Halbgruppe ist, für welche wieder die Annahme $\mathfrak{B}^*$ gilt. Genau so bildet man $\overline{\mathfrak{G}}'$ in $\mathfrak{H}'$. $\overline{\mathfrak{G}}'$ ist die zu $\overline{\mathfrak{G}}$ duale Halbgruppe.

Die Definitionen III.2 bzw. II.2 der reversiblen bzw. der Fluchtvektoren können wörtlich auf unseren Fall übertragen werden. Der Aufspaltungssatz II läßt sich nun ohne Schwierigkeit beweisen (der in Kap. III § 3 angegebene Beweis des Fixpunktsatzes läßt sich ebenfalls übertragen; man beschreibt zu diesem Zweck die starke Topologie in $\mathfrak{H}$ zweckmäßig durch ein System von Seminormen und nützt aus, daß $\mathfrak{G}$ in bezug auf jede dieser Seminormen eine Schranke besitzt (vgl. z. B. HYERS [26]). Wir arbeiten nun weiterhin unter der *Annahme, daß* $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ *ist, daß also* $\mathfrak{H}$ *keine Fluchtvektoren unter* $\mathfrak{G}$ *enthält.* $\overline{\mathfrak{G}}$ *ist dann eine Gruppe.* Wir können annehmen, daß $\mathfrak{G}$ eine Gruppe sei.

Zur Definition der fastperiodischen Vektoren verwendet man jetzt zweckmäßig die Aussage des Satzes IV.1.1: Ein Vektor $p \in \mathfrak{H}$ heißt fastperiodisch unter der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn für jedes $g' \in \mathfrak{H}'$ die auf $\mathfrak{G}$ erklärte komplexwertige Funktion

$$\varphi(x) = (xp, g')$$

fastperiodisch ist. — Man kann dann genau so, wie dies im Beweis des Satzes IV.1.1 geschehen ist, zeigen, daß der Raum $\mathfrak{P}$ der unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren in eindimensionale invariante Teilräume zerfällt (vgl. MAAK [37]). Ferner sieht man, daß die Funktionen der Gestalt

$$\psi(x) = (xh, g')$$

(mit fest gewählten $h \in \mathfrak{H}$, $g' \in \mathfrak{H}'$) schwach-fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ (im Sinne von EBERLEIN [22], S. 232) sind.

Der Beweis für die Tatsache, daß jeder reversible Vektor fastperiodisch ist, bereitet nun keine Schwierigkeiten mehr. Man braucht zu diesem Zweck den in Kap. IV § 2 angegebenen Beweis des Aufspaltungssatzes I für Gruppen lediglich bis zur Nr. 6 zu verfolgen.

Anhang II. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen

Die Sätze aus Kap. II § 1 gelten für beliebige beschränkte Halbgruppen $\mathfrak{G}$ in beliebigen komplexen Banachräumen $\mathfrak{H}$. Durch Spezialisierung kann man daraus die Hauptergebnisse der von MAAK entwickelten Theorie der fastperiodischen Funktionen auf Halbgruppen (MAAK [38]) neu gewinnen.

Es sei $\mathfrak{G}_0 = \{\xi, \eta, \ldots\}$ eine beliebige *abstrakte* Halbgruppe; sie enthalte ein Einselement ε. Es sei $\mathfrak{H}$ die Menge aller komplexwertigen, im Sinne von MAAK [38] fastperiodischen Funktionen $f(\xi)$ auf $\mathfrak{G}_0$. $\mathfrak{H}$ ist ein komplexer linearer Raum. Die Funktionen $f \in \mathfrak{H}$ sind beschränkt auf $\mathfrak{G}_0$; führt man in $\mathfrak{H}$ die Norm

$$|f| = \sup_{\xi} |f(\xi)|$$

ein, so ist $\mathfrak{H}$ ein komplexer Banachraum (MAAK [38], S. 37).

Jedem Element $\xi \in \mathfrak{G}_0$ ordnen wir eine lineare Transformation $x = T_\xi$ in $\mathfrak{H}$ zu durch die Vorschrift: Für jedes $f \in \mathfrak{H}$ sei

$$(xf)(\eta) = (T_\xi f)(\eta) = f(\eta\,\xi) \quad \text{für alle} \quad \eta \in \mathfrak{G}_0.$$

Durchläuft ξ die Halbgruppe $\mathfrak{G}_0$, so durchläuft $T_\xi = x$ eine zu $\mathfrak{G}_0$ homomorphe Halbgruppe $\mathfrak{G}$ von linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$. Dem Einselement $\varepsilon \in \mathfrak{G}_0$ entspricht dabei die Identität e in $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{G}$ besitzt die Schranke 1 in $\mathfrak{H}$. Man sieht leicht ein: Jeder Vektor $f \in \mathfrak{H}$ ist fastperiodisch unter der Halbgruppe $\mathfrak{G}$ (im Sinne der Definition II.1).

Ein spezielles Element des dualen Raumes $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$ ist das *„Dirac-Funktional" d'*, welches durch die Vorschrift

$$(f, d') = f(\varepsilon) \quad \text{für jedes} \quad f \in \mathfrak{H}$$

gekennzeichnet ist. Offensichtlich gilt für jedes $f \in \mathfrak{H}$

$$(T_\xi f, d') = f(\xi).$$

Die komplexwertigen Funktionen der Gestalt

$$f(x) = (xf, d') \tag{1}$$

sind fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$. Nach dem Einbettungssatz II.1.6 gibt es eine $\mathfrak{G}$ enthaltende *Gruppe* $\overline{\mathfrak{G}} = \{\bar{x}, \ldots\}$ von linearen Transformationen in $\mathfrak{H}$, derart, daß jeder Vektor $f \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch unter $\overline{\mathfrak{G}}$ ist. Die Funktionen der Gestalt

$$f(\bar{x}) = (\bar{x}f, d')$$

sind komplexwertige fastperiodische Funktionen auf $\overline{\mathfrak{G}}$ (im Sinne von v. Neumann-Maak, vgl. Maak [*36*], S. 26, 152), welche die auf $\mathfrak{G}$ definierten Funktionen (1) auf $\overline{\mathfrak{G}}$ fortsetzen. Aus dem Approximationssatz für fastperiodische Funktionen auf Gruppen (vgl. Maak [*36*], S. 126) folgt dann der Approximationssatz für fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen (Maak [*38*], S. 56).

Anhang III. Kontraktionen im Hilbertschen Raum

Wir betrachten den Spezialfall, daß $\mathfrak{H}$ ein *Hilbertraum* ist, und daß die Halbgruppe $\mathfrak{G}$ die Schranke 1 besitzt, d. h. nur aus *„Kontraktionen"* besteht. Es ist lediglich eine geringfügige Modifikation unserer bisherigen Bezeichnungen nötig, um zu erreichen, daß der Ausdruck (h, g') alle üblichen Eigenschaften des Skalarprodukts im Hilbertraum besitzt. Hier können wir den dualen Raum $\mathfrak{H}'$ bekanntlich mit $\mathfrak{H}$ identifizieren (Sz.-Nagy [*41*], S. 9; Halmos [*24*], S. 32), so daß die Halbgruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ beide im Raum $\mathfrak{H}$ wirken und die Räume $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{F}'$ sämtlich Teilräume von $\mathfrak{H}$ sind.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß $\mathfrak{G}$ eine zyklische Halbgruppe $\{e, x, x^2, x^3, \ldots\}$ ist, hat Sz.-Nagy einen Satz bewiesen, der sich in diesem Falle zum Beweis des Aufspaltungssatzes verwenden läßt:

Es sei x' die zu x adjungierte (= duale) Transformation in $\mathfrak{H}$. Man kann den Hilbertraum $\mathfrak{H}$ in einen anderen Hilbertraum $\mathfrak{H}_0$ einbetten und in $\mathfrak{H}_0$ eine

unitäre Transformation X_0 finden, derart, daß folgendes gilt: Ist P die orthogonale Projektion von $\mathfrak{H}_0$ auf den Teilraum $\mathfrak{H}$, so gilt

$$x^n = PX_0^n, \qquad x'^n = PX_0^{-n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(SZ.-NAGY [42], [43]).

Um den Aufspaltungssatz I für die zyklische Halbgruppe $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ zu beweisen, kann man nun folgendermaßen vorgehen:

Es sei $\mathfrak{G}_0 = \{X_0^n \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ die von X_0 erzeugte *unitäre Gruppe* in $\mathfrak{H}_0$. Sei $\mathfrak{G}_0^+ = \{X_0^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathfrak{G}_0^- = \{X_0^n \mid n = 0, -1, -2, \ldots\}$. Es ist also $P\mathfrak{G}_0^+ = \mathfrak{G}$, $P\mathfrak{G}_0^- = \mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{H}$. Für unitäre Gruppen im Hilbertraum kann man den Aufspaltungssatz I sehr einfach beweisen (MAAK [40], JACOBS [28]). Sei $\mathfrak{P}_0$ der Raum der unter $\mathfrak{G}_0$ fastperiodischen Vektoren in $\mathfrak{H}_0$, sei $\mathfrak{F}_0$ der Raum der Fluchtvektoren bezüglich $\mathfrak{G}_0$ in $\mathfrak{H}_0$. Aus der Unitarität von $\mathfrak{G}_0$ ergibt sich

1. $\mathfrak{G}_0' = \mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{P}_0' = \mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{F}_0' = \mathfrak{F}_0$.

$\mathfrak{P}_0$ ist das orthogonale Komplement von $\mathfrak{F}_0$ in $\mathfrak{H}_0$ und umgekehrt (MAAK [40], JACOBS [28]).

2. $\mathfrak{P}_0$ ist der Raum aller unter $\mathfrak{G}_0^-$ fastperiodischen Vektoren in $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{F}_0$ ist der Raum aller Fluchtvektoren bezüglich $\mathfrak{G}_0^-$ in $\mathfrak{H}_0$. $\mathfrak{P}_0$ ist zugleich der Raum aller unter $\mathfrak{G}_0^-$ fastperiodischen Vektoren, $\mathfrak{F}_0$ der Raum aller Fluchtvektoren bezüglich $\mathfrak{G}_0^-$ in $\mathfrak{H}_0$.

3. $\mathfrak{P} = P\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}'$, $\mathfrak{F} = P\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}'$.

$\mathfrak{P}$ ist das orthogonale Komplement von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{H}$ und umgekehrt. Damit ist der Aufspaltungssatz I für $\mathfrak{G}$ (und zugleich für $\mathfrak{G}'$) in $\mathfrak{H}$ in verschärfter Form bewiesen.

Man kann umgekehrt mit Hilfe des Aufspaltungssatzes I, und ohne den Satz von SZ.-NAGY zu benützen, für *beliebige kontrahierende abelsche Halbgruppen im Hilbertraum* zu denselben Verschärfungen gelangen und zusätzlich eine *Unitaritätsaussage* gewinnen, die allerdings von anderer Art als der Satz von SZ.-NAGY ist. Zuvor sei bemerkt, daß in unserem Falle der Aufspaltungssatz I sehr einfach mittels Satz II.5.2 aus dem Aufspaltungssatz II gewinnen läßt. Es gilt nun der

Satz. *Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum und $\mathfrak{G}$ eine abelsche Halbgruppe in $\mathfrak{H}$ mit der Schranke 1. Dann gilt die Aufspaltungsaussage, und es gilt ferner:*

1. $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$.

2. *$\mathfrak{F}$ ist das orthogonale Komplement von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ ist das orthogonale Komplement von $\mathfrak{F}$.*

3. *$\mathfrak{G}$ induziert in $\mathfrak{P}$ eine unitäre Halbgruppe.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die Aussage Nr. 3. Die schwache Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ induziert in $\mathfrak{P}$ eine abelsche Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_0$ mit der Schranke 1 (Satz III.5.1). Aus der Gruppeneigenschaft von $\overline{\mathfrak{G}}_0$ folgt ohne weiteres: $\overline{\mathfrak{G}}_0$ transformiert $\mathfrak{P}$ isometrisch, d. h. es gilt

$$|\bar{x}p| = |p| \quad \text{für jedes} \quad \bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}} \quad \text{und jedes} \quad p \in \mathfrak{P}.$$

Daraus folgt: $\overline{\mathfrak{G}}$ wirkt in $\mathfrak{P}$ unitär (HALMOS [24], S. 43), also induziert auch $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}$ eine unitäre Halbgruppe.

Nun beweisen wir die Aussage Nr. 1. Zunächst zeigen wir, daß der Teilraum $\mathfrak{P}$ unter $\overline{\mathfrak{G}}'$ invariant ist. Sei $p \in \mathfrak{P}$ und $\bar{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$ beliebig. Wir können $|p| = 1$ annehmen. Jedenfalls ist $|\bar{x}' p| \leqq 1$. Es gibt wegen der Unitarität von $\bar{x}$ in $\mathfrak{P}$ ein $g_0 \in \mathfrak{P}$ mit $p = \bar{x} q_0$. Dabei ist $|q_0| = 1$ und es gilt

$$(\bar{x}' p, q_0) = (p, \bar{x} q_0) = (p, p) = 1 .$$

Wäre $\bar{x}' p \in \mathfrak{P}$, so würde aus $|x' p| \leqq 1$ folgen, daß $|(\bar{x}' p, q)| < 1$ für jedes $q \in \mathfrak{P}$ mit $|q| \leqq 1$ gilt. Somit ist $\bar{x}' p \in \mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}$ ist also invariant unter $\overline{\mathfrak{G}}'$. Es folgt sofort: $\overline{\mathfrak{G}}'$ induziert in $\mathfrak{P}$ eine unitäre Gruppe, und zwar dieselbe wie $\overline{\mathfrak{G}}$: $\bar{x}' \in \overline{\mathfrak{G}}'$ wirkt in $\mathfrak{P}$ invers zu $\bar{x} \in \mathfrak{G}$. Somit sind alle Vektoren $p \in \mathfrak{P}$ auch unter $\mathfrak{G}'$ fastperiodisch: $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$. Aus Symmetriegründen folgt: $\mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P}$, also ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$. Hieraus folgt $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ (vgl. Nr. 1 und Nr. 2 des Beweises für den Aufspaltungssatz I in Kap. IV § 2) und die Aussage Nr. 2 unseres Satzes. q. e. d.

Literatur

[1] ALAOGLU and G. BIRKHOFF: General ergodic theorems. Ann. of Math. **41**, 293—309 (1940). — [2] ALEXANDROFF-HOPF: Topologie I. Berlin 1935. — [3] ARENS, R.: Duality in linear spaces. Duke Math. J. **14**, 787—794 (1947). — [4] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932. — [5] BIRKHOFF, G.: The mean ergodic theorem. Duke Math. J. **5**, 19—20 (1939). — [6] BIRKHOFF, G.: An ergodic theorem for general semigroups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **25**, 625—627 (1939). — [7] BIRKHOFF, G.: Lattice theory, 2. Aufl. New York 1948. — [8] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles (fascicule des résultats). Paris 1939. — [9] BOURBAKI, N.: Topologie generale (fascicule des résultats). Par s 1953. - [10] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Paris 1953. — [11] CLARKSON, J. A.: Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 393—414 (1936). — [12] DAY, M. M.: Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 313—317 (1941). — [13] DAY, M. M.: Ergodic theorems for abelian semi-groups, Trans. Amer. Math. Soc. **51**, 399—412 (1942). — [14] DAY, M. M.: Uniform convexity in factor and conjugate spaces. Ann. of Math. **45**, 375—385 (1944). — [15] DAY, M. M.: Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semi-groups. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 276 –291 (1950). — [16] DIEUDONNÉ, J., et L. SCHWARTZ: La dualité dans les espaces ($\mathfrak{F}$) et ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$). Ann. Inst. Fourier **1**, 61—101 (1949). — [17] DOOB: Stochastic processes. New York 1953. — [18] DUNFORD, N.: A mean ergodic theorem. Duke Math. J. **5**, 635—646 (1939). — [19] DUNFORD, N.: Spectral theory I. Convergence to projections. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 185—217 (1943). — [20] DUNFORD, N., and S. MILLER: On the ergodic theorem. Trans. Amer. Math. Soc. **60**, 538—549 (1946). — [21] EBERLEIN, W. F.: Weak compactness in Banach spaces I. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **33**, 51—53 (1947). — [22] EBERLEIN, W. F.: Abstract ergodic theorems and weakly almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 217—240 (1949). — [23] GODEMENT, R.: Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 1—84 (1948). — [24] HALMOS, P. R.: Introduction to Hilbert space. New York 1951. — [25] HOPF, E.: Ergodentheorie. Berlin 1937. — [26] HYERS, D. H.: Linear topological spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 1—21 (1945). — [27] JACOBS, K.: Ein Ergodensatz für beschränkte Gruppen im HILBERTschen Raum. Math. Ann. **128**, 340—349 (1954). — [28] JACOBS, K.: Periodizitätseigenschaften beschränkter Gruppen im HILBERTschen Raum. Math. Z. **61**, 408 –428 (1955). — [29] KAKUTANI, S.: Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets. Proc. Imp. Acad. Jap. Tokyo **1938**, 242 - 245. — [30] KAKUTANI, S.: Mean ergodic

theorem in abstract L-spaces. Proc. Imp. Acad. Jap. Tokyo **1939**, 121—123. — [*31*] KAKUTANI, S.: Ergodic theory. Proc. Internat. Congr. of Math. 1950, vol. II, S. 128—142. Providence 1952. — [*32*] KAWADA, Y.: Two remarks on H. WEYLS theorems. Kodai Math. Sem. Report **3**, 3—6 (1949). — [*33*] KÖTHE, G.: Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume. Math. Z. **51**, 317—345 (1949). — [*34*] LORCH, E. R.: Means of iterated transformations in reflexive vector spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 945—947 (1939). — [*35*] LORCH, E. R.: An integral representation of weakly almost periodic transformations in reflexive vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 18—40 (1941). — [*36*] MAAK, W.: Fastperiodische Funktionen. Berlin 1950. — [*37*] MAAK, W.: Fastperiodische invariante Vektormoduln in einem metrischen Vektorraum. Math. Ann. **122**, 157—166 (1950). — [*38*] MAAK, W.: Fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen. Acta Math. **87**, 33—57 (1952). — [*39*] MAAK, W.: Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. J. reine u. angew. Math. **190**, 34—48 (1952). — [*40*] MAAK, W.: Periodizitätseigenschaften unitärer Gruppen. Math. Scand. **2**, 334—344 (1954). — [*41*] SZ.-NAGY, B.: Spektraldarstellungen linearer Transformationen des HILBERTschen Raumes. Berlin 1942. — [*42*] SZ.-NAGY, B.: Sur les contractions de l'espace de HILBERT. Acta Sci. Math. Szeged **15**, 87—92 (1953). — [*43*] SZ.-NAGY, B.: Transformations de l'espace de HILBERT, fonctions de type positif sur un groupe. Acta Sci. Math. Szeged **15**, 104—114 (1954). — [*44*] NAKANO, H.: Modulared linear spaces. J. Fac. Sci. Tokyo **6**, 85—131 (1951). — [*45*] NEUMANN, J. v.: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. Math. Ann. **102**, 370—427 (1929). — [*46*] NEUMANN, J. v.: Proof of the quasi-ergodic hypothesis. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **18**, 70—82 (1932). — [*47*] NEUMANN, J. v.: Almost periodic functions in a group I. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 445—492 (1934). — [*48*] NIKAIDÔ, H.: On a minimax theorem and its applications to functional analysis. J. Math. Soc. Jap. **5**, 86—94 (1953). — [*49*] PETTIS, B. J.: A proof that every uniformly convex space is reflexive. Duke Math. J. **5**, 249—253 (1939). — [*50*] RIESZ, F.: Über lineare Funktionalgleichungen. Acta Math. **41**, 71—98 (1918). — [*51*] RIESZ, F.: Some mean ergodic theorems. J. London Math. Soc. **13**, 274—278 (1938). — [*52*] RIESZ, F.: Sur la théorie ergodique des espaces abstraits. Acta Sci. Math. Szeged **10**, 1—20 (1941). — [*53*] RIESZ, F.: Another proof of the mean ergodic theorem. Acta Sci. Math. Szeged **10**, 75—76 (1941). — [*54*] RIESZ, F., u. B. SZ.-NAGY: Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest 1952. — [*55*] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions I/II. Paris 1950/51. — [*56*] WEYL, H.: Almost periodic invariant vector sets in a metric vector space. Amer. J. Math. **71**, 178—205 (1949). — [*57*] WIENER, N.: The ergodic theorem. Duke Math. J. **5**, 1—18 (1939). — [*58*] YOSIDA, K., und S. KAKUTANI: Operator-theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorem. Ann. of Math. **42**, 188—228 (1941). — [*59*] DIXMIER, J.: Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications. Acta Sci. Math. Szeged **12**, 213—227 (1950).

Oberwolfach, Mathematisches Forschungsinstitut

(Eingegangen am 5. Juni 1955)

Gundlach, K.-B.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 339—352 (1956)

Poincarésche und Eisensteinsche Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe

Von
Karl-Bernhard Gundlach

Einleitung

Bei der Behandlung der Hilbertschen Modulgruppe hat man sich bisher im allgemeinen auf den Bereich beschränkt, in dem die Imaginärteile der Variablen positiv sind. Die Hilbertsche Modulgruppe eines total-reellen algebraischen Zahlkörpers K ist bekanntlich die Gruppe der linear gebrochenen Substitutionen mit Determinante 1 und ganzen Koeffizienten aus diesem Körper. Ordnet man jedem der n zu K konjugierten Körper eine komplexe Variable zu und versteht unter der Anwendung einer Substitution der Gruppe die gleichzeitige Anwendung der n zu den n konjugierten Körpern gehörigen Substitutionen mit konjugierten Koeffizienten jeweils auf die dem betreffenden Körper zugeordnete Variable, so erhält man eine Substitutionsgruppe, die die Vorzeichen der Imaginärteile der Variablen ungeändert läßt. Diese Gruppe stellt in jedem der 2^n Gebiete mit verschiedenen Vorzeichenkombinationen der Imaginärteile der Variablen eine hyperabelsche Transformationsgruppe dar.

Im Falle einer Variablen, also bei der gewöhnlichen Modulgruppe, sind die beiden Gebiete, die obere und die untere Halbebene, vollkommen gleichberechtigt, und man kommt durchweg mit einer Halbebene aus. Für $n > 1$ haben nun aber die Untersuchungen von O. Herrmann [2][1]) ergeben, daß es in der Tat nicht nur nötig ist, alle 2^n Gebiete gleichzeitig zu betrachten, sondern daß man außer der Hilbertschen Modulgruppe noch eine Reihe von weiteren Gruppen gleichen Typs zu demselben Körper untersuchen muß, die den Idealklassen des Körpers zugeordnet sind. Überdies hat sich herausgestellt, daß die 2^n Gebiete zur Hilbertschen Modulgruppe keineswegs gleichberechtigt sind.

Betrachten wir als Beispiel den Fall eines quadratischen Zahlkörpers mit total-positiver Grundeinheit und Klassenzahl 1. In den beiden Gebieten, in denen die Imaginärteile der beiden Variablen gleiches Vorzeichen haben, kann keine ganze Nichtspitzenform der Dimension -1 existieren, denn Gleichsetzen der beiden Variablen würde eine ganze, nicht verschwindende Form der Dimension -2 zur gewöhnlichen Modulgruppe liefern. In den beiden Gebieten, in denen die Imaginärteile der Variablen verschiedenes Vorzeichen haben, erhält man jedoch mit Hilfe einer Eisensteinreihe explizit eine ganze Nichtspitzenform (§ 5).

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Bei einigen der frühen Untersuchungen zur Hilbertschen Modulgruppe von HECKE (Hamburger Abhandlungen **3**, S. 213) und GÖTZKI (Math. Ann. **100**, S. 411) sowie später in einigen Fällen von MAASS wurden quadratische Zahlkörper bzw. ein spezieller quadratischer Zahlkörper und einer der beiden Bereiche zugrunde gelegt, in denen die Imaginärteile der beiden Variablen verschiedenes Vorzeichen haben. Bei den beiden letzteren trat jedoch die oben erwähnte Auszeichnung dieses Bereiches infolge der Eigenart des speziellen gewählten Körpers nicht in Erscheinung, ganz abgesehen von dem anderen Ziel der betreffenden Untersuchungen. Bei HECKE werden zwar schon Eisensteinreihen der Dimension -1 aufgestellt, jedoch wird durch einen Vorzeichenfehler auf S. 224 unten ein falsches Ergebnis erzielt; überdies werden die anderen Gebiete auch nicht zum Vergleich herangezogen. In den Untersuchungen von KLOOSTERMAN [3] werden zwar Eisensteinreihen der Dimension -1 aufgestellt, jedoch nicht auf lineare Unabhängigkeit untersucht.

Diese Verhältnisse legen es nahe, die Poincaréschen Reihen und Eisensteinreihen zu diesen Gruppen in jedem der 2^n Gebiete zu untersuchen. Die Untersuchung verläuft in vieler Hinsicht ähnlich wie in [1]. Ich verwende hier die gleichen Bezeichnungen wie dort und verweise gelegentlich auf dort durchgeführte Beweise, die ich hier nicht wiederholen will. Es ergibt sich, daß für die Dimensionen $-r \leqq -2$ die Verhältnisse bei allen Gruppen und in allen Gebieten die gleichen sind wie bei der Hilbertschen Modulgruppe im Gebiet positiver Imaginärteile der Variablen:

Für die Poincaréschen Reihen gilt der Vollständigkeitssatz, für die Fourierkoeffizienten der ganzen Spitzenformen gelten die in [1] bewiesenen Abschätzungen, und die Eisensteinreihen bilden eine Basis der Normalschar zur Schar der ganzen Spitzenformen in der Schar der ganzen Formen; der Rang dieser Schar ist gleich der Klassenzahl des Körpers[2]). Die Fourierkoeffizienten dieser Reihen werden angegeben.

Für $r = 1$ hat man bisher in keinem Falle auch nur die Hoffnung, Poincarésche Reihen aufstellen zu können; bei den Eisensteinreihen lassen sich nur die Reihen ohne Teilerfremdheitsbedingung aufstellen; Satz 5 § 5 sagt aus, welche dieser Reihen linear unabhängig sind. Die Reihen sind orthogonal zu den ganzen Spitzenformen und stellen zumindest in einigen Fällen eine Basis der Normalschar dar. Es ist bisher nicht zu ersehen, wie man entscheiden soll, ob das immer der Fall ist; jedenfalls ist kein anderes Konstruktionsverfahren für derartige Funktionen bekannt.

§1. Die Gruppen $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ und ihre Bestimmungsstücke

K sei ein total-reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n über dem Körper der rationalen Zahlen. Die n Konjugierten von K werden wie üblich mit $K^{(1)}, \ldots, K^{(n)}$ bezeichnet. Jedem Körper $K^{(j)}$ ordnet man nun eine kom-

[2]) Falls die ganzen Nichtspitzenformen nicht trivialerweise verschwinden.

plexe Variable $\tau^{(j)}$ zu, die man der Einfachheit halber als die j-te Konjugierte von τ bezeichnet. Z sei ein Bereich idealer Zahlen zu K wie in [2].

$\mathfrak{c}$ sei ein Ideal aus K, ω eine ideale Zahl aus Z mit $(\omega) = \mathfrak{c}$; $K_\mathfrak{c}$ sei die durch ω bestimmte Klasse idealer Zahlen aus Z. Die Gruppen $\Gamma_1(K_\mathfrak{c})$ sind dann wie folgt definiert (s. [2] Kap. I):

$$\Gamma_1(K_\mathfrak{c}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{matrix} \alpha, \delta \text{ aus } K,\ \beta \text{ aus } K_{\mathfrak{c}^{-1}},\ \gamma \text{ aus } K_\mathfrak{c} \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{matrix} \right\}$$

Man bildet jetzt

$$\Gamma(1, \mathfrak{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \Gamma_1(K_\mathfrak{c}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{matrix} a, d \text{ ganz aus } K,\ b \equiv 0 \bmod \mathfrak{c},\ c \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1} \\ ad - bc = 1. \end{matrix} \right\}$$

$\Gamma(1, \mathfrak{c})$ ist also eine Gruppe linear gebrochener Substitutionen mit Koeffizienten aus K und definiert in der üblichen Weise in jedem der 2^n Bereiche $Im(\tau^{(j)})\ (-1)^{lj} > 0$ eine hyperabelsche Substitutionsgruppe vom Typus der Hilbertschen Modulgruppe mit h Spitzen; h ist die Klassenzahl von K.

Wesentlich für die Behandlung dieser Gruppen sind die beiden folgenden Sätze:

Satz 1. *ξ sei eine Zahl aus K und $(\mathfrak{c}, \xi)$ gehöre zu der Idealklasse des Ideals $\mathfrak{a}$. Dann gibt es zwei Zahlen γ, δ so, daß $\gamma \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}$, $\delta \equiv 0 \bmod (1)$ ist und $\xi = -\frac{\delta}{\gamma}$ mit $(\gamma\mathfrak{c}, \delta) = \mathfrak{a}$ ist. Weiter gilt:*

1. *Es gibt zwei Zahlen α, β mit $(\alpha, \mathfrak{c}^{-1}\beta) = \mathfrak{a}^{-1}$ so, daß*

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist.

2. *Ist*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

so sind in der Spitze $\xi = A^{-1}\infty$ die Multiplikatoren von $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ alle Einheiten aus K und die Translationen die Zahlen b aus K mit

$$b \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-2}.$$

Satz 2. *ξ sei eine Zahl aus K, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mathfrak{a}, A$ seien wie in Satz 1 bestimmt. ξ_1 sei eine weitere, eventuell die gleiche, Zahl aus K. $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \mathfrak{b}$ mit $(\mathfrak{c}\gamma_1, \delta_1) = \mathfrak{b}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$ seien nach der Vorschrift von Satz 1 bestimmt. Die Matrizen M aus $A\Gamma(1, \mathfrak{c})B^{-1}$ seien mit*

$$M = \begin{pmatrix} h_1 & k \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

bezeichnet. Dann gilt:

1. *In* (1) *durchläuft* m_1 *alle Zahlen* $m_1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}$.

2. m_2 *durchläuft die Zahlen* $m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$, *für die*

$$(m_1 \mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-1}, m_2 \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$$

ist.

3. *Bei festem* m_1 *gibt es ein* χ *aus* K *mit* $(\chi, m_1\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ *so, daß* m_2 *in* (1) *die Restklassen* $\chi j \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2}$ *durchläuft, wobei* j *ein volles Restsystem* $\bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ *unter der Nebenbedingung*

$$(j, m_1 \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}) = 1$$

genau einmal durchläuft. Weiter ist

$$h_1 \equiv \bar{j}\varphi \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-2}$$

mit

$$(\varphi \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}, m_1 \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}) = 1.$$

φ *hängt von* m_1, *aber nicht von* m_2 *ab.* $\bar{j}$ *ist durch*

$$j\bar{j} \equiv 1 \bmod (m_1)\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$$

bestimmt.

Beweise. Die Existenz von γ, δ aus Satz 1 ist trivial. Nun ist

$$(\omega\gamma, \delta) = \mathfrak{a}, \quad \delta \text{ aus } K, \quad \omega\gamma \text{ aus } K_{\mathfrak{c}}.$$

Nach Hilfssatz 4 [2] gibt es Zahlen λ, μ mit

$$\lambda\delta + \mu\omega\gamma = 1, \quad \lambda \text{ aus } K, \quad \mu \text{ aus } K_{\mathfrak{c}^{-1}}, \quad \lambda \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}^{-1}, \quad \mu \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}^{-1},$$

also

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (\alpha, \mathfrak{c}^{-1}\beta) = \mathfrak{a}^{-1}, \quad \alpha, \beta \text{ aus } K,$$

wenn man $\alpha = \lambda$, $\mu\omega = -\beta$ setzt, q.e.d.

Zur Bestimmung der Translationen in $A^{-1}\infty = \xi$ sei

$$T(A, \Gamma(1, \mathfrak{c})) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Gruppe der Translationen von $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ in $A^{-1}\infty = \xi$. Dann ist

$$A^{-1}T(A, \Gamma(1, \mathfrak{c}))A = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 + \gamma\delta b & \delta^2 b \\ -\gamma^2 b & 1 - \gamma\delta b \end{pmatrix} \right\}.$$

Notwendig dafür, daß diese Matrizen in $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ liegen, ist

$$\mathfrak{c} \mid \delta^2 b \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}^{-1} \mid \gamma^2 b,$$

also

$$\mathfrak{c} \mid (\delta^2, \mathfrak{c}^2\gamma^2)\, b, \quad \text{d.h.} \quad b \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-2}.$$

Diese Bedingung ist aber offenbar auch hinreichend.

Zur Bestimmung der Multiplikatoren berechnet man zunächst die Matrizen

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ m_1^* & m_2^* \end{pmatrix} \quad \text{aus} \quad A\Gamma(1, \mathfrak{c}).$$

Nun ist

$$(\gamma, \delta) L = (m_1^*, m_2^*) \quad \text{mit} \quad L \text{ aus } \Gamma(1, \mathfrak{c})$$

gleichbedeutend mit

$$\begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \end{pmatrix} = L' \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L' \text{ aus } \Gamma(1, \mathfrak{c}^{-1})$$

oder

$$\begin{pmatrix} m_1^* \\ \omega^{-1} m_2^* \end{pmatrix} = L^* \begin{pmatrix} \gamma \\ \omega^{-1} \delta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L^* \text{ aus } \Gamma_1(K_{\mathfrak{c}^{-1}}).$$

Das ist aber nach Hilfssatz 14 [2] gleichbedeutend mit

$$(m_1^*, m_2^* \omega^{-1}) = (\gamma, \omega^{-1} \delta),$$

d.h.

$$(m_1^* \omega, m_2^*) = (\omega \gamma, \delta) = \mathfrak{a}.$$

Die zweiten Zeilen aus $A\Gamma(1, \mathfrak{c})$ sind somit genau die Zahlenpaare m_1^*, m_2^* mit

$$(\mathfrak{c} m_1^*, m_2^*) = \mathfrak{a}.$$

Diese zweiten Zeilen können sich um jede Einheit aus K unterscheiden, womit die Multiplikatoren bestimmt sind. Für die ersten Zeilen gilt

$$(k_1, k_2) = (\alpha, \beta) L \qquad \text{mit} \quad L \text{ aus } \Gamma(1, \mathfrak{c}),$$

also

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \omega^{-1} k_2 \end{pmatrix} = L^* \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega^{-1} \beta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L^* \text{ aus } \Gamma(K_{\mathfrak{c}^{-1}}),$$

also

$$(k_1, \mathfrak{c}^{-1} k_2) = \mathfrak{a}^{-1}.$$

Zum Beweis von Satz 2 muß man nun $A\Gamma(1, \mathfrak{c}) B^{-1}$ ausrechnen. Nun ist

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & -\gamma_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ \omega^{-1} m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & -\omega \gamma_1 \\ -\omega^{-1} \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \omega^{-1} \end{pmatrix}.$$

Sei jetzt $(\zeta) = \mathfrak{b}$, dann ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{pmatrix} \zeta^{-1} m_1 \\ \zeta m_2 \omega^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} \delta_1 & -\omega \zeta^{-1} \gamma_1 \\ -\zeta \omega^{-1} \beta_1 & \zeta \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^* \\ m_2^* \omega^{-1} \end{pmatrix},$$

Die rechtsstehende Matrix ist jetzt eine ganzzahlige Matrix mit der Determinante 1. Man sieht: m_1, m_2 durchlaufen genau die Zahlenpaare, für die

$$(m_1 \mathfrak{b}^{-1}, m_2 \mathfrak{b} \mathfrak{c}^{-1}) = (m_1^*, m_2^* \mathfrak{c}^{-1}),$$

also

$$(m_1 \mathfrak{c} \mathfrak{b}^{-1}, m_2 \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$$

ist. Für die ersten Zeilen gilt entsprechend

$$\begin{pmatrix} \zeta^{-1} h_1 \\ \zeta \omega^{-1} k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} \delta_1 & -\omega \zeta^{-1} \gamma_1 \\ -\zeta \omega^{-1} \beta_1 & \zeta \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \omega^{-1} k_2 \end{pmatrix}$$

und daher

$$(h_1 \mathfrak{b}^{-1}, k \mathfrak{b} \mathfrak{c}^{-1}) = \mathfrak{a}^{-1}.$$

Man wählt nun zwei Zahlen η, χ so aus, daß

$$\eta \equiv 0 \bmod (m_1) \mathfrak{c}, \quad (\chi) = \mathfrak{a} \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{g}, \quad (\eta, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{g}) = 1$$

ist. Dann ist

$$(\eta, \chi) = \mathfrak{a} \mathfrak{b}^{-1}.$$

Nun ist also

$$m_2 = j \chi + j_1 \eta \equiv j \chi \bmod (m_1) \mathfrak{c}$$

mit ganzen j, j_1.

Aus

$$(m_1 \mathfrak{c} \mathfrak{b}^{-1}, m_2 \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$$

schließen wir

$$(j, m_1 \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}^{-1}) = 1$$

und umgekehrt.

m_2 liege in einer festen Restklasse $\bmod (m_1) \mathfrak{c} \mathfrak{b}^{-2}$. Da

$$m_2 \equiv j \chi \bmod (m_1) \mathfrak{c} \mathfrak{b}^{-2}$$

ist, liegt j in einer festen Restklasse $\bmod (m_1) \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}^{-1}$ und umgekehrt. Durchläuft m_2 also ein volles Restsystem $\bmod (m_1) \mathfrak{c} \mathfrak{b}^{-2}$ unter der Nebenbedingung

$$(m_2 \mathfrak{b}, m_1 \mathfrak{c} \mathfrak{b}^{-1}) = \mathfrak{a},$$

so durchläuft j ein volles Restsystem $\bmod (m_1) \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}^{-1}$ unter der Nebenbedingung

$$(j, m_1 \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}^{-1}) = 1.$$

Um $h_1 \bmod (m_1) \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-2}$ festzulegen, wählt man zwei Zahlen $\varkappa$ und ψ so aus, daß

$$\varkappa \equiv 0 \bmod (m_1) \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}, \qquad (\psi) = \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b} \mathfrak{g}_1$$

$$(\varkappa, \mathfrak{g}_1) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_1) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{g}_1) = 1$$

ist. Dann ist

$$h_1 = h \psi + h_2 \varkappa \equiv h \psi \bmod (m_1) \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}$$

mit ganzen h, h_2. Nun ist

$$m_2 h_1 = 1 + m_1 k \equiv 1 \bmod (m_1) \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}^{-1},$$

also

$$1 \equiv (j \chi + j_1 \eta)(h \psi + h_2 \varkappa) \equiv j h \chi \psi \bmod (m_1) \mathfrak{c} \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}^{-1}.$$

Weiter ist

$$(\chi\psi) = \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}, \quad \text{d.h.} \quad (\chi\psi, m_1 \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}) = 1,$$

also

$$j h \equiv \overline{(\chi\psi)} \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$$

$$h \equiv \overline{(\chi\psi)}\, j \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1},$$

wenn

$$(\chi\psi)\,\overline{(\chi\psi)} \equiv j\bar{j} \equiv 1 \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$$

ist. Damit ist

$$h_1 \equiv \overline{j(\chi\psi)} \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-2}.$$

§2. Integrale und Integralabschätzungen

Wir benötigen Abschätzungen bzw. explizite Werte für die folgenden Integrale:

1. $$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x + \frac{\lambda^2\mu}{m_1^2 x}\right\}}}{x^r |x|^s}\, dx \qquad \mu y > 0.$$

Man setze hierzu in [1] § 5 $|y|$ statt y und $\nu \cdot \operatorname{sign}(\mu)$ statt ν. Dann gelten die dort angegebenen Abschätzungen ohne weitere Veränderung.

2. Analog wie in [1] S. 326 erhält man für $\mu \cdot \operatorname{sign}(y) > 0$

$$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x + \frac{\lambda^2\mu}{m^2 x}\right\}}}{x^r}\, dx$$

$$= \begin{cases} 2\pi \operatorname{sign}(y)^r\, e^{-\frac{1}{2}\pi i r} \left\{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{m_1}{\lambda}\right\}^{r-1} J_{r-1}\left(4\pi(\nu\mu)^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\lambda}{m_1}\right|\right) & \text{für } \nu \cdot \operatorname{sign}(y) > 0 \\ 0 & \text{für } \nu \cdot \operatorname{sign}(y) < 0. \end{cases}$$

J_{r-1} ist wieder die $(r-1)$-te Besselfunktion.

3. $$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu x}}{x^r |x|^s}\, dx = \operatorname{sign}(y)^r \int_{i|y|-\infty}^{i|y|+\infty} \frac{e^{-2\pi i\,[\nu \cdot \operatorname{sign}(y)]\, x}}{x^{r+\frac{1}{2}s}(x - 2i|y|)^{\frac{1}{2}s}}\, dx.$$

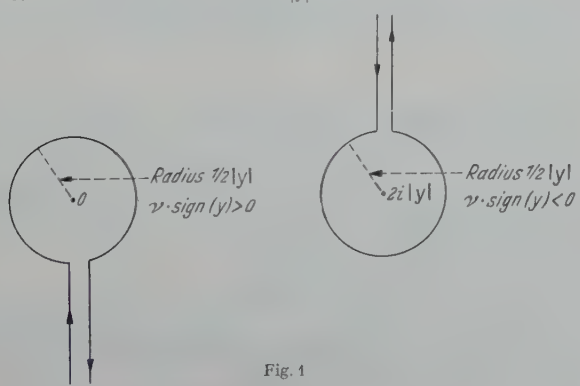

Fig. 1

Bei der in der Skizze angegebenen Wahl des Integrationsweges erhält man folgende Abschätzungen:

$$\int \Big| < \begin{cases} C\, e^{\pi \nu y}\, |y|^{1-r-Re(s)} & \text{für} \quad \nu \cdot \operatorname{sign}(y) > 0 \\ C\, e^{-3\pi|\nu y|}\, |y|^{1-r-Re(s)} & \text{für} \quad \nu \cdot \operatorname{sign}(y) < 0 . \end{cases}$$

4. Durch Umbiegen des Integrationsweges erhält man auf dem üblichen Wege

$$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu x}}{x^r}\, dx = \begin{cases} \operatorname{sign}(y)\, \dfrac{(-2\pi i)^r}{(r-1)!}\, \nu^{r-1} & \text{für} \quad \nu \cdot \operatorname{sign}(y) > 0 \\ 0 & \text{für} \quad \nu \cdot \operatorname{sign}(y) < 0 . \end{cases}$$

5. Durch Umbiegen des Integrationsweges und nachfolgende Drehung um $\pi/2$ (Substitution) erhält man

$$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{dx}{x^r |x|^s} = (2|y|)^{1-r-s}\, (i)^{r+s-1} \operatorname{sign}(y)^r \int_W \frac{dt}{t^{r+\frac{1}{2}s} (t+1)^{\frac{1}{2}s}} .$$

Der Weg W führt von $+\infty$ im negativen Sinne um den Nullpunkt und zurück nach $+\infty$. Er schneidet die reelle Achse zwischen -1 und 0. Hieraus ergibt sich

$$\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{dx}{x^r |x|^s} = (-2i|y|)^{1-r-s} \operatorname{sign}(y)^r\, (1 - e^{\pi i s})\, \frac{\Gamma(1-r-\frac{1}{2}s)\,\Gamma(r+s-1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s)} .$$

6. Man erhält hieraus

$$\lim_{s \to 0} \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{dx}{x^r |x|^s} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r > 1 \\ \pi i \cdot \operatorname{sign}(y) & \text{für} \quad r = 1 . \end{cases}$$

Die behandelten Integrale sind jeweils in ihrem Existenzbereich zu betrachten. Verbiegung des Integrationsweges oder explizite Auswertung liefern gegebenenfalls die analytische Fortsetzung als Funktionen von s.

§3. Die Poincaréschen Reihen

In jedem der betrachteten Gebiete (s. § 1) definiert man nun für positives ganzes r und $Re(s) > 0$ die Poincaréschen Reihen

$$G_{-r}(\tau, s, A, \Gamma(1, \mathfrak{c}), \mu) = \sum_{M_1 < V(A\Gamma(1,\mathfrak{c}))} N(m_1^* \tau + m_2^*)^{-r}\, |N(m_1^* \tau + m_2^*)|^{-s} \sum_{\lambda > 0} e^{2\pi i S \mu (\lambda^2 M_1(\tau) + b^*)} .$$

Dabei ist $Im(\mu\tau) > 0$ und $\mu \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a}^2\mathfrak{d}^{-1}$. $\mathfrak{d}$ ist die Differente von K. Man geht nun genau so vor wie in [1] § 3.

Ist $B^{-1}\infty$ eine Spitze (B wie in Satz 2), so wird

$$N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)^{-r}\, |N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)|^{-s}\, G_{-r}(B^{-1}\infty, s, A, \Gamma(1, \mathfrak{c}), \mu) = \sum_{M < V(A\Gamma(1,\mathfrak{c})\,B^{-1})} N(m_1\tau + m_2)^{-r}\, |N(m_1\tau + m_2)|^{-s} \sum_{\lambda > 0} e^{2\pi i S \mu (\lambda^2 M(\tau) + b^*)} .$$

Die Reihe rechts zerfällt in zwei Teile. Der eine Teil ist

$$\sum_{m_1=0} = \sum_{\substack{(m_2)=\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\\(m_2)}} N(m_1)^{-r}\,|N(m_1)|^{-s} \sum_{\lambda>0} e^{2\pi i S\mu\left(\lambda^2\frac{h_1\tau+k}{m_2}+b^*\right)}.$$

Dieser Teil ist bereits eine normale Fourierreihe in τ. Der andere Teil ist

$$\sum_{\lambda>0} e^{2\pi i S\mu b^*} \sum_{\substack{m_1\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\\(m_1)\\m_1\neq 0}} N(m_1)^{-r}\,|N(m_1)|^{-s} \times$$

$$\times \sum_{\substack{j \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\\(j,\,m_1\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1})=1}} e^{2\pi i S\mu\lambda^2\frac{\varphi\bar{j}}{m_1}} \sum_{b\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2}} \frac{e^{\frac{-2\pi i S\,\frac{\mu\lambda^2}{m_1^2\left(\tau+\frac{1}{m_1}\chi j+b\right)}}}}{N\left(\tau+\frac{\chi j}{m_1}+b\right)^r N\left(\tau+\frac{\chi j}{m_1}+b\right)^s},$$

wenn man Satz 2 berücksichtigt. Diesen Teil entwickelt man in der üblichen Weise in eine Fourierreihe (s. [*1*] § 3) und erhält als Fourierkoeffizienten

$$a(\nu,s,y) = \sum_{\lambda>0} \frac{e^{2\pi i S\mu b^*}}{\sqrt{|D|}\,N(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2})} \sum_{\substack{m_1\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\\(m_1)\\m_1\neq 0}} \frac{W(m_1,A,B,\Gamma(1,\mathfrak{c}))}{N(m_1)^r\,|N(m_1)|^s} \times$$

$$\times N\left[\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i\left\{\nu x+\frac{\lambda^2\mu}{m_1^2 x}\right\}}}{x^r\,|x|^s}\,dx\right]$$

mit

$$W(m_1,A,B,\Gamma(1,\mathfrak{c})) = \sum_{\substack{j \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\\(j,\,m_1\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1})=1}} e^{2\pi i S\left(\frac{\nu\chi}{m_1}j+\frac{\lambda^2\mu\varphi}{m_1}\bar{j}\right)}.$$

D ist die Diskriminante von K.

Die Gestalt dieser Koeffizienten zeigt in Verbindung mit den Integralabschätzungen des vorigen Paragraphen unmittelbar, daß das gesamte Verfahren der §§ 2 und 3 in [*1*] auch hier durchführbar ist, also insbesondere die analytische Fortsetzung und die Metrisierung im Falle $r=2$. Man erhält somit folgendes Ergebnis:

Satz 3. *Die oben aufgestellten Fourierreihen setzen im Falle $r=2$ die Funktionen $G_{-2}(\tau,s,A,\Gamma(1,\mathfrak{c}),\mu)$ als Funktionen von s bis einschließlich $s=0$ fort. Die Funktionen*

$$G_{-r}(\tau,0,A,\Gamma(1,\mathfrak{c}),\mu), \qquad r=2,3,\ldots, \qquad Im(\mu\tau)>0$$

enthalten eine endliche Basis der Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma(1,\mathfrak{c}),-r,1\}$ im betrachteten Gebiet. Die Fourierkoeffizienten sind

$$a(\nu,0,*) = \operatorname{sign}\left(N(y)^r\right)(2\pi)^r\,e^{-\frac{1}{2}\pi i n r}\,\frac{N(\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}^2)}{\sqrt{|D|}} \sum_{\lambda>0} e^{2\pi i S\mu b^*} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m_1\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\\(m_1)\\m_1\neq 0}} N\left\{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{m_1}{\lambda}\right|\right\}^{r-1} \sum_{\substack{j \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\\(j,\,m_1\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1})=1}} \frac{e^{2\pi i S\,\frac{1}{m_1}(\nu\chi j+\lambda^2\mu\varphi\bar{j})}}{N(m_1)^r} N\left\{J_{r-1}\left(4\pi(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\lambda}{m_1}\right|\right)\right\}$$

für $\nu \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}^2\mathfrak{d}^{-1}$, $\operatorname{Im}(\nu\tau) > 0$, *wozu für* $(\nu) = (\mu)\mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{b}^2$ *noch der Anteil des ersten Reihenteils kommt.*

Für die ganzen Spitzenformen aus $\{\Gamma(1, \mathfrak{c}), -r, 1\}$ *gilt Satz 3 aus* [1] *S. 324.*

§4. Die Eisensteinreihen

Genau wie bei den Poincaréschen Reihen geht man auch bei den Eisensteinreihen vor. Man setzt an:

$$G^*_{-r}(\tau, s, A, \Gamma(1, \mathfrak{c})) = \sum_{\substack{m_1^* \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}^{-1} \\ m_2^* \equiv 0 \bmod \mathfrak{a} \quad (m_1^*)}} N(m_1^*\tau + m_2^*)^{-r} \,|\, N(m_1^*\tau + m_2^*)|^{-s}, \quad r + Re(s) > 2.$$

Die Invarianz gegen $\Gamma(1, \mathfrak{c})$ ist evident. Zur Ermittlung der Fourierentwicklung in $B^{-1}\infty$ bildet man

$$N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)^{-r} \,|\, N(-\gamma_1\tau + \alpha_1)|^{-s} G_{-r}(B^{-1}\infty, s, A, \Gamma(1, \mathfrak{c}))$$

$$= \sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \\ m_2 \neq 0}} N(m_2)^{-r} \,|\, N(m_2)|^{-s} + \sum_{\substack{m_1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}^{-1} \\ m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1} \quad (m_1) \\ m_1 \neq 0}} N(m_1)^{-r} \,|\, N(m_1)|^{-s} N\left(\tau + \frac{m_2}{m_1}\right)^{-r} \left| N\left(\tau + \frac{m_2}{m_1}\right)\right|^{-s}$$

$$= \sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \\ m_2 \neq 0}} N(m_2)^{-r} \,|\, N(m_2)|^{-s} + \sum_{\substack{m_1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}^{-1} \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} N(m_1)^{-r} \,|\, N(m_1)|^{-s} \times$$

$$\times \sum_{\substack{j \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1} \\ \mathfrak{b} \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}\,\mathfrak{b}^{-2}}} N\left(\tau + \frac{\chi j}{m_1} + b\right)^{-r} \left| N\left(\tau + \frac{\chi j}{m_1} + b\right)\right|^{-s}.$$

Den zweiten Teil entwickelt man in eine Fourierreihe und erhält

$$a_{-r}(\nu, s, y, A, B)$$

$$= \sum_{\substack{m_1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}^{-1} \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} \frac{N(m_1)^{-r} \,|\, N(m_1)|^{-s}}{\sqrt{|D|}\, N(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-2})} \sum_{j \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}} e^{2\pi i S \frac{\nu\chi}{m_1} j} N\left[\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu x}}{x^r \,|\, x|^s}\, dx\right].$$

Nun ist

$$\sum_{j \bmod (m_1)\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}} e^{2\pi i S \frac{\nu\chi}{m_1} j} = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{\nu\chi}{m_1} \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{d}^{-1} \\ N\left((m_1)\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach der Wahl von χ ist

$$\left(\frac{\chi}{m_1}\right) = \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}(m_1)^{-1} = \mathfrak{g}\left((m_1)\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\right)^{-1},$$

also

$$\frac{\nu\chi}{m_1} \equiv 0 \bmod \mathfrak{d}^{-1} \quad \text{äq} \quad \mathfrak{d}^{-1} \,|\, (\nu)\,\mathfrak{g}(m_1)^{-1}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1} \quad \text{äq} \quad (m_1) \,|\, (\nu)\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{d},$$

da $\mathfrak{g}$ zu m_1 teilerfremd ist. Das liefert

$$a_{-r}(\nu, s, y, A, B) = \frac{N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})}{\sqrt{|D|}} \sum_{\substack{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}^{-1} \,|\, m_1 \,|\, \nu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{d} \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} \frac{\operatorname{sign}(N(m_1)^r)}{|N(m_1)|^{r+s-1}} N\left[\int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu x}}{x^r \,|\, x|^s}\, dx\right].$$

Die Integralabschätzungen garantieren für jedes positive ganze r die analytische Fortsetzung der Eisensteinreihen als Funktionen von s bis einschließlich $s=0$, da auch die konstanten Koeffizienten der Fourierreihen fortsetzbar sind, wie wir unten sehen werden. Genau wie in [1] § 3 läßt sich auch die Metrisierung fortsetzen, so daß die $G_{-r}(\tau, 0, A, \Gamma(1, \mathfrak{c}))$ sich als Orthogonalfunktionen zur Schar der ganzen Spitzenformen herausstellen.

Die Fourierkoeffizienten der G_{-r} für $\nu \neq 0$ sind offenbar

$$a^*_{-r}(\nu, 0, *, A, B) = \operatorname{sign}\big(N(y)\big)\,\frac{(-2\pi i)^{nr}\,N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})}{(r-1)!\,\sqrt{|D|}} \times \\ \times \big(N(\nu)\big)^{r-1} \sum_{\substack{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}^{-1} \mid m_1 \mid \nu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{b} \\ (m_1)}} \frac{\operatorname{sign}\big(N(m_1)\big)^r}{|N(m_1)|^{r-1}}$$

mit $\operatorname{Im}(\nu\tau) > 0$. Für $\nu = 0$ müssen wir noch den von τ unabhängigen ersten Teil unserer Reihenaufspaltung hinzufügen und dabei die Fälle $r=1$ und $r \geqq 2$ unterscheiden. Für $r \geqq 2$ ergibt sich

$$a^*_{-r}(0, 0, *, A, B) = \sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \qquad m_2 \neq 0}} N(m_2)^{-r} \quad ,$$

da $a_{-r}(0, 0, *, A, B) = 0$ ist.

Für $r=1$ ist dagegen

$$a^*_{-1}(0, s, y, A, B)\Big|_{s=0} = \sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \qquad m_2 \neq 0}} N(m_2)^{-1}\,|N(m_2)|^{-s}\Big|_{s=0} + \\ + (\tau i)^n \operatorname{sign}\big(N(y)\big)\,\frac{N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})}{\sqrt{|D|}} \sum_{\substack{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}^{-1} \mid m_1 \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} \operatorname{sign}\big(N(m_1)\big)\,|N(m_1)|^{-s}\Big|_{s=0} .$$

Diesen Ausdruck formen wir mit Hilfe der in [4] behandelten ζ-Funktionen mit Vorzeichencharakteren um. Da ganze Nichtspitzenformen für $r=1$ bekanntlich nicht existieren können, wenn es eine Einheit mit negativer Norm in K gibt, setzen wir o.B.d.A. voraus, daß alle Einheiten positive Norm haben. $\chi(\mathfrak{g})$ sei nun ein durch $\chi(\xi) = \operatorname{sign}\big(N(\xi)\big)$ für Hauptideale definierter Vorzeichencharakter (s. [4]). Dann ist [ich schreibe hier der Einfachheit halber $\zeta(s, \mathfrak{a}, \chi)$ statt $\zeta(s, K_{\mathfrak{a}}, \chi)$]

$$\sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \qquad m_2 \neq 0}} N(m_2)^{-1}\,|N(m_2)|^{-s} = \sum_{\substack{m_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1} \\ (m_2) \qquad m_2 \neq 0}} \chi(m_2)\,|N(m_2)|^{-1-s} \\ = \bar{\chi}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})^{1+s} \sum_{\mathfrak{g} \sim \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}} \chi(\mathfrak{g})\,N(\mathfrak{g})^{-1-s} \\ = \bar{\chi}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})^{1+s}\,\zeta(1+s, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, \chi)$$

und

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}^{-1} \mid m_1 \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} \operatorname{sign}\big(N(m_1)\big)\,|N(m_1)|^{-s} = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}^{-1} \mid m_1 \\ (m_1) \quad m_1 \neq 0}} \bar{\chi}(m_1)\,|N(m_1)|^{-s} \\ = \chi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c})\,N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c})^s \sum_{\mathfrak{g} \sim \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}} \bar{\chi}(\mathfrak{g})\,N(\mathfrak{g})^{-s} \\ = \chi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c})\,N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c})^s\,\zeta(s, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}, \bar{\chi}) .$$

Weiter ist nun

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^n \zeta(0, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}, \bar{\chi}) = (-i)^n \bar{\chi}(\mathfrak{d})\, \pi^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|D|}\, \zeta(1, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}, \chi),$$

also

$$\zeta(0, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}, \bar{\chi}) = (-i)^n \bar{\chi}(\mathfrak{d})\, \pi^{-n} \sqrt{|D|}\, \zeta(1, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}, \chi).$$

Damit ergibt sich

$$a^*_{-1}(0, 0, y, A, B)$$
$$= \bar{\chi}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})\, N(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}) \{\zeta(1, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, \chi) + \operatorname{sign}\big(N(y)\big)\, \chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{c})\, \zeta(1, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}, \chi)\}.$$

Die lineare Unabhängigkeit der Eisensteinreihen für $r \geqq 2$ läßt sich genau wie in [3] nachweisen. Man sieht ohne Schwierigkeiten, daß sich auch die einer einzelnen Klasse äquivalenter Spitzen zugeordneten Eisensteinreihen, deren konstantes Glied also genau in diesen Spitzen von Null verschieden ist, ohne weiteres aufstellen lassen. Man erhält diese Reihen durch Einführung einer Teilerfremdheitsbedingung in unseren obigen Ansatz. Es folgt also:

Satz 4. *Im Falle $r \geqq 2$ bilden die Eisensteinreihen eine Basis der Orthogonalschar zur Schar der ganzen Spitzenformen in der Schar der ganzen Formen aus $\{\Gamma(1, \mathfrak{c}), -r, 1\}$. Der Rang dieser Schar ist gleich der Klassenzahl von K, falls nicht r ungerade ist und es eine Einheit mit negativer Norm in K gibt. In letzterem Falle ist der Rang Null.*

§5. Die lineare Unabhängigkeit der Eisensteinreihen für $r = 1$

Uns interessiert hier nur der Fall, daß es in K keine Einheit mit negativer Norm gibt. Die Idealklassen von K repräsentieren wir durch die Primideale (für die Hauptklasse nehmen wir natürlich das 1-Ideal)

$$\mathfrak{r}_1 = (1), \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_h.$$

Die zugehörigen Matrizen A seien

$$A_{\mathfrak{r}_1}, \ldots, A_{\mathfrak{r}_h}.$$

(Diese Matrizen sind natürlich an und für sich nicht eindeutig bestimmt, sondern hängen von der speziellen Spitze ab, im folgenden tritt aber nur die Abhängigkeit von der Idealklasse in Erscheinung.) $\mathfrak{r}$ sei nun eines der $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_h$, A das zugehörige $A_{\mathfrak{r}}$. Dann ist

$$a^*_{-1}(0, 0, y, A, B)$$
$$= \bar{\chi}(\mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{b})\, N(\mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{b}) \{\zeta(1, \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{b}, \chi) + \operatorname{sign}\big(N(y)\big)\, \chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{r}^{-2}\mathfrak{c})\, \zeta(1, \mathfrak{r}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}, \chi)\}.$$

Es sei $\mathfrak{y} \sim \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$. Da die ζ-Funktion nur von der Idealklasse abhängt, ist

$$\zeta(1, \mathfrak{y}\mathfrak{b}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}, \chi) = \zeta(1, \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{b}, \chi).$$

$\mathfrak{y}$ sei eines der $\mathfrak{r}_j$. Dann erhält man

$$a^*_{-1}(0, 0, y, A_{\mathfrak{y}}, B)$$
$$= \bar{\chi}(\mathfrak{y}^{-1}\mathfrak{b})\, N(\mathfrak{y}^{-1}\mathfrak{b}) \{\zeta(1, \mathfrak{r}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}\mathfrak{b}, \chi) + \operatorname{sign}\big(N(y)\big)\, \chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{y}^{-2}\mathfrak{c})\, \zeta(1, \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{b}, \chi)\},$$

also

$$\chi(\mathfrak{y}^{-1})\,\bar{\chi}(\mathfrak{x}^{-1})\,N(\mathfrak{y}\mathfrak{x}^{-1})\,\mathrm{sign}\,(N(y))\,\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c})\,a^{*}_{-1}(0,0,y,A_{\mathfrak{y}},B)=\bar{\chi}(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b})\times$$

$$\times\{\mathrm{sign}\,(N(y))\,\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c})\,\zeta(1,\mathfrak{x}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}\mathfrak{b},\chi)+\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{y}^{2}\mathfrak{c})\,\zeta(1,\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b},\chi)\}.$$

Nun ist

$$\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{y}^{-2}\mathfrak{c})=\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{y}^{-1})^{2}=\chi(\text{Hauptideal})^{2}=+1,$$

also

$$\chi(\mathfrak{y}^{-1})\,\bar{\chi}(\mathfrak{x}^{-1})\,N(\mathfrak{y}\mathfrak{x}^{-1})\,\mathrm{sign}\,(N(y))\,\chi(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c})\,a^{*}_{-1}(0,0,y,A_{\mathfrak{y}},B)$$

$$=a^{*}_{-1}(0,0,y,A,B).$$

Da der Faktor nicht von der Spitze abhängt, hat die Eisensteinreihe zur Spitze $\mathfrak{x}$ bis auf einen konstanten Faktor in allen Spitzen die gleichen konstanten Glieder wie die Eisensteinreihe zur Spitze $\mathfrak{y}\sim\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$. Da beides Orthogonalfunktionen zu den ganzen Spitzenformen sind, sind sie linear abhängig. Also gilt:

Ist $\mathfrak{x}\sim\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, d.h. $\mathfrak{x}^{2}\sim\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, so gehören zu den Spitzen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}\sim\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ bis auf einen konstanten Faktor die gleichen Eisensteinreihen.

Ist $\mathfrak{x}\sim\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, d.h. $\mathfrak{x}^{2}\sim\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, so handelt es sich bei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ um die gleiche Spitze. Dann ist

$$a^{*}_{-1}(0,0,y,A,B)$$

$$=\bar{\chi}(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b})\,\{\zeta(1,\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b},\chi)+\mathrm{sign}\,(N(y))\,\chi(\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1})\,\zeta(1,\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{b},\chi)\}$$

$$=0\quad\text{falls}\quad\mathrm{sign}\,(N(y))\,\chi(\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1})=-1\quad\text{ist.}$$

Das Vorzeichen von $\chi(\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1})$ ist offenbar nur durch $\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ und die Klasse von $\mathfrak{x}^{2}\sim\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, d.h. nur durch $\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ bestimmt.

Satz 5. *Im Falle $r=1$ sind die Eisensteinreihen zu den Idealklassen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ bis auf eine Konstante gleich. Ist $\mathfrak{x}^{2}\sim\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$, so verschwindet die Eisensteinreihe zur Klasse $\mathfrak{x}$ identisch, wenn das Hauptideal $\mathfrak{x}^{-2}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}$ eine Erzeugende $\varkappa$ mit*

$$\mathrm{sign}\,(N(y\varkappa))=-1$$

hat.

Die verbleibenden Eisensteinreihen sind linear unabhängig.

Beweis der linearen Unabhängigkeit:

$\mathfrak{x}_j$ sei eines der $\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_h$. In den zu $\mathfrak{x}_j$ gehörigen Spitzen sind die Exponenten der Fourierreihe die ν mit

$$\nu\equiv 0\bmod\mathfrak{x}_j^{2}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}^{-1},\qquad \nu\cdot\mathrm{Im}\,(\tau)>0.$$

In der Klasse von $\mathfrak{x}_j^{-2}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ wählt man ein Primideal $\mathfrak{y}$ so, daß das Hauptideal $\mathfrak{y}\mathfrak{x}_j^{2}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ eine Erzeugende ν_j mit

$$\nu_j\,\mathrm{Im}\,(\tau)>0$$

hat, was immer möglich ist (s. z.B. [4]). Dann ist ν_j die Nummer eines Fourierkoeffizienten. Der zugehörige Koeffizient der Eisensteinreihe zu $\mathfrak{x}$ ist

$$C \sum_{m_1} \operatorname{sign}\big(N(m_1)\big), \qquad C \neq 0.$$

Die Summationsvorschrift lautet

$$\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_j \mid m_1 \mid \mathfrak{y}\,\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_j, \quad (m_1),$$

also ist

$$(m_1) = \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_j \sim (1) \quad \text{oder} \quad (m_1) = \mathfrak{y}\,\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_j \sim (1).$$

Das bedeutet: Ist der Koeffizient von Null verschieden, so ist entweder $\mathfrak{x} \sim \mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1}$ oder $\mathfrak{x} \sim (\mathfrak{x}_j^{-1}\mathfrak{c})^{-1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{-1}$ oder beides. Ist $\mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1} \sim (\mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1})^{-1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{-1}$, so ist der Koeffizient mit der Nummer ν_j genau dann von Null verschieden, wenn

$$\mathfrak{x} \sim \mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{x} \sim (\mathfrak{c}_j^{-1}\mathfrak{x})^{-1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{-1} \quad \text{ist.}$$

In beiden Fällen handelt es sich jedoch faktisch um die gleiche Reihe. Die Reihen zu diesen $\mathfrak{x}$ sind also von allen anderen und unter sich linear unabhängig. Es fehlen jetzt noch die $\mathfrak{x}$, für die

$$\mathfrak{x} \sim \mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1} \sim (\mathfrak{c}\mathfrak{x}_j^{-1})^{-1}\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{-1} \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{x}^2 \sim \mathfrak{c}\,\mathfrak{d}^{-1}$$

ist. In diesem Falle treten in der Summe für den Koeffizienten ν_j zwei wesentlich verschiedene Werte von m_1 auf, nämlich

$m_1 = \varrho, \quad (\varrho) = \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_j$

$m_1 = \varrho\mu, \quad (\mu) = \mathfrak{y}, \ \operatorname{sign}\big(N(\mu\varkappa y)\big) > 0, \quad \text{d.h.} \quad \operatorname{sign}\big(N(\mu)\big) = \operatorname{sign}\big(N(\varkappa y)\big).$

Also ist

$$\sum \operatorname{sign}\big(N(m_1)\big) = 1 + \operatorname{sign}\big(N(\mu)\big) = 1 + \operatorname{sign}\big(N(y\varkappa)\big).$$

Der Koeffizient ist ersichtlich von Null verschieden, wenn die Eisensteinreihe nach den obigen Betrachtungen nicht schon sowieso verschwindet.

Literatur

[1] GUNDLACH, K.-B.: Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppe und die Abschätzung ihrer Fourierkoeffizienten. Acta math. **92**, 309—345 (1954). — [2] HERRMANN, O.: Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Math. Ann. **127**, 357—400 (1954). — [3] KLOOSTERMAN: Theorie der Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen. Abhandl. math. Sem. Hamburg. Univ. **6**, 163—188 (1928). — [4] LANDAU, E.: Über Ideale und Primideale in Idealklassen. Math. Z. **2**, 52—154 (1918).

Münster, II. Math. Institut der Universität

(Eingegangen am 2. August 1955)

Baumann, V.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 353—384 (1956)

Eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung der Wärmeübertragung bei Wärmeleitung und -strahlung

Von
Volker Baumann

Einleitung

Die in dieser Arbeit behandelte Gleichung geht aus einem Problem der stationären Wärmeübertragung hervor. Ein planparallel verteiltes homogenes isotropes Medium der Dicke h mit dem Brechungsindex n, dem Wärmeleitungskoeffizienten $\varkappa$ und dem Absorptionskoeffizienten $k(\lambda)$ werde von zwei ebenen schwarzen Strahlern mit der konstanten Temperatur T_0 bzw. T_h begrenzt. Dann bestehen nach L. Genzel [2][1]) zwischen dem durch Wärmeleitung und -strahlung bestimmten Temperaturverlauf $T(x)$ im Inneren des Mediums und dem Energiefluß E_g der durch die Integrodifferentialgleichung

$$(1)\quad \begin{cases} E_g \frac{1}{2\pi n^2} = \int_0^\infty \int_0^h k(\lambda) \operatorname{sign}(x-t) \cdot K_1\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, T(t)\big)\, dt\, d\lambda - \\ \quad - \int_0^\infty \big\{K_2\big(k(\lambda)\, x\big)\, E(\lambda, T_0) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)\, E(\lambda, T_h)\big\}\, d\lambda - \frac{\varkappa}{2\pi n^2} T'(x) \end{cases}$$

beschriebene Zusammenhang, wobei $T(x)$ und E_g die unbekannten Größen, die sonst eingehenden Größen aber alle gegeben sind (s. S. 355).

In der Stellarphysik werden ähnliche Gleichungen seit geraumer Zeit untersucht. Es seien hier etwa die die Entwicklung einleitenden Arbeiten von K. Schwarzschild [11], E. A. Milne [8], E. Hopf [4] und die neuere Monographie von V. Kourganoff und I. W. Busbridge [6] erwähnt. Aber es liegt in der Natur dieser Probleme, die Wärmeleitung zu vernachlässigen ($\varkappa = 0$) und das Medium als nur einseitig begrenzt und bestrahlt aufzufassen, was die dort auftretenden Gleichungen von der hier behandelten prinzipiell unterscheidet.

Mathematisch ist diese Gleichung der Klasse der nichtlinearen Integrodifferentialgleichungen unterzuordnen. Sie kann durch Integration nach x auf die Gestalt einer nichtlinearen Integralgleichung gebracht werden:

$$(2)\qquad \varkappa\, T(x) = F(x) + C \int_0^\infty \int_0^h K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, T(t)\big)\, dt\, d\lambda,$$

wobei $F(x)$ nur bis auf eine lineare Funktion bestimmt ist, dafür aber der gesuchten nichtnegativen Lösungsfunktion Randwerte R_0, R_h vorgeschrieben sind.

[1]) Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

Die von E. SCHMIDT [10] und L. LICHTENSTEIN [7] verfolgte Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen im Kleinen läßt sich — ganz abgesehen davon, daß sie nur für absolut kleine Werte C das Problem lösen könnte — nicht auf (2) anwenden, weil $F(x)$ nicht eindeutig vorgegeben und der zweidimensionale Integrationsbereich nicht beschränkt ist.

Derselbe Grund macht eine Anwendung der Untersuchungen von A. HAMMERSTEIN [3] und R. IGLISCH [5] über nichtlineare Integralgleichungen im Großen unmöglich. Aber auch in dem speziellen Fall $k(\lambda) = \text{const}$ („Grauer Fall"), in dem die Gl. (2) die Form

$$\varkappa T(x) = F(x) + C_1 \int_0^h K_2(k|x-t|)\, T^4(t)\, dt \tag{3}$$

annimmt, können die Sätze von Hammerstein und Iglisch nicht benutzt werden, da die Nichtlinearität der vierten Potenz die Voraussetzung dieser Sätze nicht erfüllt.

Unter diesen Umständen bleibt kein anderer Weg, als den Eindeutigkeits- und Existenzbeweis unter Ausnutzung spezieller Eigenschaften der in die Gleichung eingehenden Funktionen anzugehen.

(a) Für den Eindeutigkeitsbeweis wird im wesentlichen die differenzierte Form

$$\left\{\begin{aligned} \varkappa T''(x) = F''(x) &+ 2C \int_0^\infty k(\lambda)\, E\big(\lambda, T(x)\big)\, d\lambda + \\ &+ C \int_0^\infty \int_0^h k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, T(t)\big)\, dt\, d\lambda \end{aligned}\right. \tag{4}$$

der Gl. (1) benutzt, da in ihr der inhomogene Bestandteil im Gegensatz zu (2) eindeutig bestimmt ist. Zwei verschiedene stetige nichtnegative Funktionen $T_0(x)$ und $T_1(x)$ mögen Gl. (4) erfüllen. Subtrahiert man die entsprechenden Gleichungen und integriert über die x-Bereiche, in denen $T_0(x) > T_1(x)$ bzw. $T_0(x) < T_1(x)$ ist, so ergibt sich für $\varkappa = 0$ unmittelbar ein Widerspruch, im Falle $\varkappa > 0$ für die Randdifferenzen $T_0(0) - T_1(0)$ und $T_0(h) - T_1(h)$ eine Aussage, die der Forderung $T_0(0) = T_1(0)$, $T_0(h) = T_1(h)$ widerspricht.

(b) Der Existenzbeweis für den Fall $\varkappa = 0$ (reine Strahlung) benutzt ebenfalls die Form (4) des Problems, da es nur so durch eine Integralgleichung zweiter Art dargestellt wird. In diesem Fall ist die Lösung schon durch die in die Gleichung selbst eingehenden Parameter eindeutig bestimmt, weshalb die Vorgabe von Randwerten unzulässig ist. Die Lösung erfolgt mittels eines Iterationsverfahrens, das mit der Funktion $f_0(x) = \text{Max}(T_0, T_h)$ beginnt; die Konvergenz folgt daraus, daß die Iteriertenfolge monoton abnimmt und durch $\text{Min}(T_0, T_h)$ beschränkt wird.

(c) Zum Existenzbeweis im allgemeinen Falle $\varkappa > 0$ wird der Operator

$$\begin{aligned} U[f] = G(x) + C_2 \int_0^\infty \int_0^h \Big\{ &K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big) - K_2\big(k(\lambda)\, t\big) + \\ &+ \frac{x}{h}\big[K_2\big(k(\lambda)\, t\big) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-t)\big)\big]\Big\}\, E\big(\lambda, f(t)\big)\, dt\, d\lambda \end{aligned}$$

über dem Raum $\mathfrak{C}^+$ der über $[0, h]$ stetigen nichtnegativen Funktionen $f(x)$ untersucht; er ist so beschaffen, daß eine Fixfunktion dieses Operators die Gl. (1) löst und vorgeschriebene Randwerte R_0, R_h annimmt. Zum Nachweis der Existenz einer solchen Fixfunktion wird ein bekannter Fixpunktsatz für Funktionalräume von J. SCHAUDER [9] angewandt. Da sich aber keine Teilmenge des Raumes $\mathfrak{C}^+$ angeben ließ, die durch U in sich selbst abgebildet wird, und deren U-Bild kompakt ist, wie es für die Anwendung des Schauderschen Satzes erforderlich wäre, wird der Operator U zu einem Operator V abgeändert: Der Definitionsbereich von U wird auf die Menge $\mathfrak{F}$ der Funktionen aus $\mathfrak{C}^+$ eingeschränkt, die durch $\operatorname{Min}(T_0, T_h, R_0, R_h) = b$ und $\operatorname{Max}(T_0, T_h, R_0, R_h) = B$ beschränkt sind. Die Abbildung V geht aus U hervor, indem die Funktionswerte der U-Bilder, die größer als B bzw. kleiner als b sind, durch B bzw. b ersetzt werden. Diese Abänderung ist sinnvoll; denn es kann bewiesen werden, daß eine Fixfunktion des Operators V auch Fixfunktion des Operators U ist, und daß der Operator V die Voraussetzungen des Schauderschen Satzes erfüllt. Dieser Existenzbeweis ist nicht konstruktiv.

Es bleibt weiteren Untersuchungen vorbehalten, die hier benutzten Voraussetzungen möglicherweise einzuschränken, um die Tragfähigkeit der angewandten Methoden auf eine noch größere Klasse von nichtlinearen Integrodifferentialgleichungen auszudehnen. Wie die Bibliographie von J. LERAY [13] zeigt, erwies sich die Anwendung topologischer Fixpunktsätze auf analytische Probleme, vor allem Differentialgleichungen, als fruchtbar.

Eine numerische Behandlung des Problems für den Fall einer konstanten Absorptionsfunktion $k(\lambda)$ wurde vom Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt unter Leitung von A. WALTHER [12] in Angriff genommen.

Die Anregung zur vorliegenden Untersuchung ging von Frau Prof. R. MOUFANG aus, wofür ich ihr zu großem Dank verpflichtet bin.

§1. Problemstellung, Hilfsätze und Umformungen

1.1. Die zu lösende Integrodifferentialgleichung. Sie lautet:

$$(1.1)\quad \begin{cases} E_g\,\frac{1}{2\pi n^2} = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^h k(\lambda)\,\operatorname{sign}(x-t)\,K_1\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda, T(t)\big)\,dt\,d\lambda - \\ \quad - \int\limits_0^\infty \big\{K_2\big(k(\lambda)\,x\big)\,E(\lambda, T_0) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)\,E(\lambda, T_h)\big\}\,d\lambda - \frac{\varkappa}{2\pi n^2}\,T'(x). \end{cases}$$

Dabei sind gegeben:

a) die nichtnegative, bis auf höchstens endlich viele Stellen stetige (stückweis stetige) beschränkte reelle Funktion $k(\lambda)$ für $0 \leq \lambda < +\infty$,

b) die nichtnegativen reellen Konstanten T_0, T_h, $\varkappa$, $n > 0$, $h > 0$ sowie die nichtnegativen Randwerte R_0, R_h [2]),

[2]) Den Physiker interessieren natürlich besonders die Randwerte $R_0 = T_0$, $R_h = T_h$.

c) die Integro-Exponentialfunktionen $K_i(t)$ durch folgende Induktion nach i:

$$(1.2)\quad \begin{cases} K_0(t) = Ei(-t) = -\int_t^\infty \frac{e^{-s}}{s}\,ds & \text{für } t>0, \\ K_i(t) = -\int_t^\infty K_{i-1}(s)\,ds & \text{für } i=1,2,3,\ldots \text{ und } t\geqq 0, \end{cases}$$

d) die Plancksche Strahlungsfunktion

$$(1.3)\quad E(\lambda, T) = \begin{cases} 2c_1\lambda^{-5}\left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}}-1\right)^{-1} & \text{für } T\neq 0 \text{ und } \lambda \neq 0, \\ 0 & \text{für } T=0 \text{ oder } \lambda = 0, \end{cases}$$

wobei c_1 und c_2 positive reelle Konstanten darstellen.

Gesucht wird

1. eine über dem Intervall $0\leqq x\leqq h$ stetige, im Falle $\varkappa>0$ differenzierbare Funktion $T(x)$[3]), die nichtnegativ ist, für eine geeignete Konstante E_g die Gl. (1.1) erfüllt und die gegebenen Randwerte annimmt: $T(0)=R_0$, $T(h)=R_h$,

2. die zur Lösung gehörige Konstante E_g.

Die Voraussetzungen a) bis d) sollen für alle folgenden Betrachtungen erfüllt sein, auch wenn dies im Einzelfall nicht mehr besonders erwähnt wird.

1.2. Die Integro-Exponentialfunktionen $K_i(t)$.

$K_0(t)$ ist hinlänglich bekannt und tabuliert[4]); es sei nur noch erwähnt, daß zwar

$$\lim_{t\to+0} K_0(t) = -\infty,$$

aber nach der Regel von de l'Hospital für beliebiges positives α

$$(1.4)\quad \lim_{t\to+0} t^\alpha K_0(t) = \lim_{t\to+\infty} t^\alpha K_0(t) = 0$$

wird[5]).

Aus (1.2) geht hervor, daß

$$(1.5)\quad K_i'(t) = K_{i-1}(t) \quad \text{für} \quad \begin{cases} i=1 \text{ und } t>0, \\ i=2,3,\ldots \text{ und } t\geqq 0. \end{cases}$$

Die Funktionen $K_i(t)$ lassen sich rekursiv ausdrücken:

$$(1.2')\quad K_i(t) = \frac{1}{i}\left\{t\,K_{i-1}(t) + (-1)^{i+1}e^{-t}\right\}, \qquad i=1,2,\ldots \text{ und } t\geqq 0;$$

denn nach (1.2), (1.5) und Induktion stimmen die Ableitungen beider Seiten von (1.2') überein, und beide Seiten streben wegen (1.4) für $t\to+\infty$ gegen

[3]) Wir vereinbaren: Für $\varkappa=0$ soll das Produkt $\varkappa T'(x)=0$ sein, unabhängig davon, ob T' existiert oder nicht.

[4]) Man vergleiche etwa die Funktionentafeln von JAHNKE-EMDE (Berlin 1931) oder die Monographie von KOURGANOFF-BUSBRIDGE [6], die in ihrem Anhang eine umfassendere Untersuchung der Integro-Exponentialfunktionen enthält.

[5]) Durch diesen Grenzwert wollen wir die Funktion $t^\alpha K_0(t)$ an der Stelle $t=0$ definieren.

Null. Wir ersehen aus dieser Darstellung, daß die Integrale (1.2) an der Stelle $t=0$ existieren für $i=1, 2, \ldots$.

Uns interessieren weiterhin hauptsächlich nachstehende Folgerungen aus (1.2), (1.2′) und (1.5):

$$(1.6)\qquad \begin{cases} -\infty = \lim\limits_{t\to+0} K_0(t) < K_0(t) < 0, \\ -\frac{1}{i} = K_i(0) \leqq K_i(t) < 0 \quad \text{für gerade } i>0, \\ \frac{1}{i} = K_i(0) \geqq K_i(t) > 0 \quad \text{für ungerade } i, \end{cases}$$

sowie

$$(1.7)\qquad K_i'(t) \begin{cases} >0 & \text{für } i=0, 2, 4, \ldots, \\ <0 & \text{für } i=1, 3, 5, \ldots, \end{cases}$$

d.h. die Funktionen $K_i(t)$ verlaufen i.e.S.[6]) monoton, und die Integrationsformeln ($k\geqq 0$):

$$(1.8)\qquad \int_0^a k\,K_0\big(k|x-t|\big)\,dt = -2 + K_1(kx) + K_1\big(k(a-x)\big) \quad \text{für} \quad 0\leqq x\leqq a,$$

$$(1.8')\qquad \int_0^a k\,K_0\big(k|x-t|\big)\,dt = K_1(kx) - K_1\big(k(x-a)\big) \quad \text{für} \quad 0\leqq a\leqq x.$$

1.3. Die Plancksche Strahlungsfunktion $E(\lambda, T)$

(a) Für alle $\lambda>0$, $T>0$ wird

$$(1.9)\qquad E(\lambda, T)>0, \quad E_T(\lambda, T)>0 \quad \text{und} \quad E_{TT}(\lambda, T)>0,$$

d.h. insbesondere: bei festem positivem λ nehmen die Funktionen $E(\lambda, T)$ und $E_T(\lambda, T)$ mit T i.e.S. monoton zu.

Beweis. Für $E(\lambda, T)$ und

$$E_T(\lambda, T) = \begin{cases} 2c_1c_2\,\dfrac{\lambda^{-6}\,e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}{T^2\left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}}-1\right)^2} & \text{für} \quad \lambda\neq 0 \text{ und } T\neq 0 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

ist die Behauptung (1.9) evident. Für $\lambda>0$ und $T>0$ wird

$$E_{TT}(\lambda, T) = -2c_1\lambda^{-5}T^{-2}\varphi\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)\psi\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)$$

mit

$$\varphi(x) = x\,e^x(e^x-1)^{-3} \quad \text{und} \quad \psi(x) = (2+x)(e^x-1) - 2x\,e^x.$$

Für positive x ist $\varphi(x)>0$, und wegen $\psi(0)=\psi'(0)=0$ wird $\operatorname{sign}\psi(x) = \operatorname{sign}\psi''(x) = \operatorname{sign}(-x\,e^x) = -1$.

[6]) i.e.S. bedeute „im engeren Sinne", i.w.S. „im weiteren Sinne".

(b) Für jede reelle Zahl $T \geqq 0$ wird

$$\int_0^\infty E(\lambda, T)\, d\lambda = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \tag{1.10}$$

und

$$\int_0^\infty E_T(\lambda, T)\, d\lambda = \frac{\sigma}{\pi} \frac{d}{dT} T^4 = \frac{4\sigma}{\pi} T^3 \tag{1.10'}$$

mit $\sigma = \frac{2}{15} \pi^5 \frac{c_1}{c_2^4}$.

Die Integrale konvergieren absolut[7]) und für eine beliebige positive Zahl T_0 gleichmäßig über $0 \leqq T \leqq T_0$.

Beweis. Gl. (1.10) ist hinlänglich bekannt. Die Gl. (1.10') ist für $T = 0$ trivial, und für $T > 0$ wird

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{E_T(\lambda, T)}{E(\lambda, T)} = c_2 T^{-1} \lim_{\lambda T \to +\infty} \frac{(\lambda T)^{-1}}{1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}} = c_2 T^{-1} \lim_{\lambda T \to +\infty} \frac{c_2^{-1}}{e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}} = T^{-1},$$

weshalb das in (1.10') auftretende Integral konvergiert. Nach (a) konvergieren beide Integrale absolut und gleichmäßig, woraus insbesondere die Gl. (1.10') folgt.

1.4. Hilfsätze

Um die Existenz der in (1.1) auftretenden Integrale nachzuweisen, sowie um diese Gleichung durch Differentiation und Integration umzuformen, stellen wir zum Teil auch noch anderweitig benötigte Hilfsmittel zusammen.

Hilfsatz 1. Es sei $k(\lambda) \not\equiv 0$[8]). Für $x \geqq 0$ konvergiert das Integral

$$\Phi(x) = \int_0^\infty k(\lambda)\, E(\lambda, x)\, d\lambda \tag{1.11}$$

absolut und über jedem beschränkten x-Intervall gleichmäßig. Die Funktion $z = \Phi(x)$ nimmt über $x \geqq 0$ jeden Wert $z \geqq 0$ genau einmal an, nimmt i.e.S. monoton zu und ist stetig; dasselbe gilt über $z \geqq 0$ für die Umkehrfunktion $x = \Phi^{-1}(z)$.

Beweis. 1. Da $k(\lambda)$ stückweise stetig und beschränkt vorausgesetzt wird, ist nach § 1.3 die Konvergenzaussage evident.

2. Nach (1.3), (1.9) und (1.10') gilt

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = +\infty, \quad \Phi'(x) = \int_0^\infty k(\lambda)\, E_x(\lambda, x)\, d\lambda > 0 \quad (x > 0),$$

woraus die restliche Behauptung folgt.

[7]) Die Eigenschaft der absoluten Konvergenz erwähnen wir für dieses und die folgenden Integrale, um sie als L-Integrale auffassen zu können.

[8]) Hier wie im folgenden bedeute $k(\lambda) \not\equiv 0$, daß $k(\lambda)$ L-fast überall, d.h. nach den Voraussetzungen von S. 355 bis auf endlich viele Stellen verschwindet. $k(\lambda) \not\equiv 0$ impliziert also, daß $k(\lambda)$ in einem Intervall nicht verschwindet.

Hilfsatz 2. Für $0 \leqq x \leqq h$ konvergieren die Integrale

$$f_0(x) = \int_0^\infty \frac{1}{k(\lambda)} \left\{ \left[K_3(k(\lambda)\, x) - \frac{1}{3} \right] E(\lambda, T_0) + \left[K_3(k(\lambda)\,(h-x)) - \frac{1}{3} \right] E(\lambda, T_h) \right\} d\lambda,$$

$$f_1(x) = \int_0^\infty \{ K_2(k(\lambda)\, x)\, E(\lambda, T_0) - K_2(k(\lambda)\,(h-x))\, E(\lambda, T_h) \}\, d\lambda,$$

$$f_2(x) = \int_0^\infty k(\lambda) \{ K_1(k(\lambda)\, x)\, E(\lambda, T_0) - K_1(k(\lambda)\,(h-x))\, E(\lambda, T_h) \}\, d\lambda$$

absolut und gleichmäßig und es gilt $f_0''(x) = f_1'(x) = f_2(x)$; $f_2(x)$ ist überdies stetig.

Beweis. Aus den Ungleichungen (1.6), der Beschränktheit von $k(\lambda) \geqq 0$, aus

$$\lim_{k \to +0} \frac{1}{k} \left(K_3(k\,h) - \frac{1}{3} \right) = \lim_{k \to +0} h\, K_2(k\,h) = -\frac{h}{2}$$

und

$$0 \geqq K_3(k\,t) - \tfrac{1}{3} \geqq K_3(k\,h) - \tfrac{1}{3} \qquad (0 \leqq t \leqq h)$$

folgt, daß die Faktoren von $E(\lambda, T_0)$ und $E(\lambda, T_h)$ in den drei Integranden beschränkt sind und ihr Vorzeichen nicht wechseln, weshalb die Integrale nach § 1.3b) absolut und gleichmäßig konvergieren. Da die Integranden von f_1 bzw. f_2 durch ein- bzw. zweimalige partielle Differentiation nach x aus dem von f_0 hervorgehen, vgl. (1.5), und bis auf endlich viele Stellen λ stetig sind, trifft auch die restliche Behauptung zu.

Hilfsatz 3. Ist $f(x)$ eine über $0 \leqq x \leqq h$ nichtnegative, L-integrable, beschränkte Funktion, so existiert das L-Integral

$$g(x) = \int_0^\infty \int_0^h k^2(\lambda) \cdot K_0(k(\lambda)\,|x-t|) \cdot E(\lambda, f(t))\, dt\, d\lambda \tag{1.12}$$

und stellt eine für $0 \leqq x \leqq h$ stetige Funktion von x dar.

Beweis. 1. Der Integrand ist über $(0 \leqq t \leqq h;\ \lambda \geqq 0)$ L-meßbar. Nach § 1.3a) ist außerdem wegen $0 \leqq f(x) \leqq C$ auch $E(\lambda, C) \geqq E(\lambda, f(t)) \geqq 0$, also mit (1.6) für $x \neq t$

$$k^2(\lambda) \cdot K_0(k(\lambda)\,|x-t|) \cdot E(\lambda, C) \leqq k^2(\lambda) \cdot K_0(k(\lambda)\,|x-t|) \cdot E(\lambda, f(t)) \leqq 0.$$

Das Doppelintegral über die linke Seite dieser Ungleichung existiert aber gemäß § 1.3b), da nach (1.8)

$$\int_0^h k^2(\lambda) \cdot K_0(k(\lambda)\,|x-t|)\, dt$$

gleichmäßig in (x, λ) beschränkt ist; daher existiert auch das Integral (1.12).

2. Da $K_0(t)$ i.e.S. monoton zunimmt, wird nach (1.8) und (1.8′) für $0 \leq x \leq x+\delta \leq h$ und alle $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} D_\delta(x,\lambda) &= \int_0^h k(\lambda)\cdot\left|K_0\big(k(\lambda)\,|x+\delta-t|\big)-K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\right| dt \\ &= \int_0^{x+\frac{\delta}{2}} k(\lambda)\cdot\left[K_0\big(k(\lambda)\,(x+\delta-t)\big)-K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\right] dt + \\ &\quad + \int_{x+\frac{\delta}{2}}^h k(\lambda)\cdot\left[K_0\big(k(\lambda)\,(t-x)\big)-K_0\big(k(\lambda)\,|x+\delta-t|\big)\right] dt \\ &= 4\cdot\left[1-K_1\Big(k(\lambda)\,\frac{\delta}{2}\Big)\right]+K_1\big(k(\lambda)\,(x+\delta)\big)-K_1\big(k(\lambda)\,x\big)+ \\ &\quad + K_1\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)-K_1\big(k(\lambda)\,(h-x-\delta)\big). \end{aligned}$$

Weil $K_1(t)$ stetig und $k(\lambda)$ beschränkt ist, gibt es zu gegebenem $\varepsilon>0$ ein $\delta_0>0$, so daß für alle (x,λ) aus $(0\leq x\leq h;\ \lambda\geq 0)$ und δ mit $0\leq\delta<\delta_0$

$$0 \leq D_\delta(x,\lambda) < \varepsilon$$

und damit

$$|g(x+\delta)-g(x)| \leq \int_0^\infty k(\lambda)\,E(\lambda,C)\,D_\delta(x,\lambda)\,d\lambda < \varepsilon\int_0^\infty k(\lambda)\,E(\lambda,C)\,d\lambda$$

wird, womit auch die behauptete Stetigkeit bewiesen ist.

Hilfsatz 4. Für eine beliebige, über dem Intervall $0\leq x\leq h$ stetige und nichtnegative Funktion $f(x)$ konvergieren die Integrale

$$g_0(x) = \int_0^\infty\int_0^h K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda,f(t)\big)\,dt\,d\lambda,$$

$$g_1(x) = \int_0^\infty\int_0^h k(\lambda)\,\operatorname{sign}(x-t)\,K_1\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda,f(t)\big)\,dt\,d\lambda$$

und

$$g_2(x) = 2\int_0^\infty k(\lambda)\,E\big(\lambda,f(x)\big)\,d\lambda + \int_0^\infty\int_0^h k^2(\lambda)\,K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda,f(t)\big)\,dt\,d\lambda$$

absolut und gleichmäßig und stehen in der Relation

$$g_0''(x) = g_1'(x) = g_2(x), \qquad (0\leq x\leq h).$$

Beweis. Die Konvergenzbehauptung folgt für g_0 und g_1 mit § 1.3b) aus der Beschränktheit der bei $E\big(\lambda,f(t)\big)$ stehenden Faktoren, für g_2 aus den Hilfsätzen 1 und 3. Da außerdem nach diesen Hilfsätzen $g_2(x)$ stetig ist, wird

$$h(x) = \int_0^x g_2(z)\,dz$$

eine Stammfunktion von $g_2(x)$ sein. Weil sämtliche betrachteten Integrale als L-Integrale existieren, können wir den Satz von Fubini anwenden[9]):

$$h(x)=\int_0^\infty k(\lambda)\left\{2\int_0^x E\left(\lambda,f(z)\right)dz+\int_0^h\int_0^x k(\lambda)\,K_0\left(k(\lambda)\,|z-t|\right)E\left(\lambda,f(t)\right)dz\,dt\right\}d\lambda.$$

Nach (1.8) und (1.8′) wird

$$\int_0^h\int_0^x k(\lambda)\,K_0\left(k(\lambda)\,|z-t|\right)E\left(\lambda,f(t)\right)dz\,dt$$

$$=\int_0^x\left[K_1\left(k(\lambda)\,t\right)+K_1 k(\lambda)\,(x-t)\right)-2\right]E\left(\lambda,f(t)\right)dt+$$

$$+\int_x^h\left[K_1\left(k(\lambda)\,t\right)-K_1\left(k(\lambda)\,(t-x)\right)\right]E\left(\lambda,f(t)\right)dt,$$

also

$$h(x)=\int_0^\infty\int_0^h k(\lambda)\,\mathrm{sign}\,(x-t)\,K_1\left(k(\lambda)\,|x-t|\right)E\left(\lambda,f(t)\right)dt\,d\lambda+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^h k(\lambda)\,K_1\left(k(\lambda)\,t\right)E\left(\lambda,f(t)\right)dt\,d\lambda,$$

d.h. $h(x)$ unterscheidet sich von $g_1(x)$ nur um eine additive Konstante. Analog wird die Gleichung $g_0'(x)=g_1(x)$ bewiesen.

1.5. Umformungen der Ausgangsgleichung (1.1)

Die oben bewiesenen Hilfsätze erlauben Integration und Differentiation der Gl. (1.1) nach x.

A. Integration. Jede stetige[10]) nichtnegative Lösungsfunktion der Gl. (1.1) löst auch die Gleichung

$$(1.13)\quad\begin{cases}E_g\frac{x}{2\pi n^2}+D_0\frac{1}{2\pi n^2}=\int_0^\infty\int_0^h K_2\left(k(\lambda)\,|x-t|\right)E\left(\lambda,T(t)\right)dt\,d\lambda-\int_0^\infty\frac{1}{k(\lambda)}\times\\ \times\left\{\left[K_3\left(k(\lambda)\,x\right)-\frac{1}{3}\right]E(\lambda,T_0)+\left[K_3\left(k(\lambda)\,(h-x)\right)-\frac{1}{3}\right]E(\lambda,T_h)\right\}d\lambda-\frac{\varkappa}{2\pi n^2}T(x)\end{cases}$$

mit einer geeigneten Konstanten D_0. Umgekehrt ist jede stetige nichtnegative Lösungsfunktion von (1.13) Lösung von (1.1) (unabhängig von der Konstanten D_0).

Beweis. Sämtliche Summanden der Gl. (1.13) bis auf den letzten sind nach Hilfsatz 2 und 4 differenzierbar, also auch $T(x)$, und die Differentiation ergibt (1.1).

---

[9]) Es wird die auf nicht-beschränkte Ordinatenmengen verallgemeinerte Form dieses Satzes benutzt, wie sie etwa bei Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung III (Berlin 1938), S. 95—96, bewiesen wurde.

[10]) Für $\varkappa>0$ ist diese Forderung trivial erfüllt.

B. Differentiation. Jede stetige[10]) nichtnegative Lösungsfunktion der Gl. (1.1) löst auch die Gleichung

$$(1.14)\quad \begin{cases} 0 = 2\int_0^\infty k(\lambda)\,E\big(\lambda, T(x)\big)\,d\lambda + \int_0^\infty \int_0^h k^2(\lambda)\,K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda, T(t)\big)\,dt\,d\lambda - \\ -\int_0^\infty k(\lambda)\,\{K_1\big(k(\lambda)\,x\big)\,E(\lambda, T_0) + K_1\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)E(\lambda, T_h)\}\,d\lambda - \frac{\varkappa}{2\pi n^2}\,T''(x), \end{cases}$$

und umgekehrt ist jede stetige[10]) nichtnegative Lösungsfunktion von (1.14) auch Lösung von (1.1) mit einer geeigneten Konstanten E_g.

Beweis. Wie in A. geht (1.1) durch Differentiation in (1.14) über.

Aus den Hilfsätzen 1 und 3 und aus der Gl. (1.14) folgt noch das

Korollar: a) Für $\varkappa > 0$ ist jede nichtnegative Lösung $T(x)$ von (1.1) zweimal stetig differenzierbar;

b) für $\varkappa = 0$ und $k(\lambda) \not\equiv 0$[11]) ist jede beschränkte, nichtnegative und L-integrable Lösungsfunktion der Gl. (1.14) stetig.

§ 2. Der Eindeutigkeitsbeweis

Bevor wir uns mit der Existenz von Lösungen beschäftigen, soll nachgewiesen werden, daß die Lösungen durch die in das Problem eingehenden Parameter eindeutig bestimmt sind. Den trivialen Fall $k(\lambda) = 0$[11]) wollen wir dabei von der Betrachtung ausschließen, da er in § 3 und § 4 vollständig behandelt werden wird.

Die als Daten in die Gl. (1.1) eingehenden Parameter $T_0, T_h, \varkappa, n, h$ und die Funktion $k(\lambda) \not\equiv 0$[11]) seien beliebig im Rahmen der ihnen in § 1 auferlegten Voraussetzungen gewählt und für das Folgende festgehalten.

2.1. Ein Lemma.

Das Kernstück der Eindeutigkeitsbeweise unter **2.2** bildet folgendes

Lemma: $T_0(x)$ und $T_1(x)$ seien zwei stetige nichtnegative Lösungen der Gl. (1.1) mit zwei beliebigen zugehörigen Konstanten E_{g_0} und E_{g_1}. Dann gilt für die Differenz

$$(2.1)\qquad u(x) = T_0(x) - T_1(x)$$

eine der fünf Behauptungen (a) bis (c):

(a) $u(0) > 0$, $u'(0) < 0$, $u(h) < 0$ und $u'(h) < 0$
und $u(x)$ nimmt im Intervall $[0, h]$ sowohl positive als auch negative Werte an;

(a′) $u(0) < 0$, $u'(0) > 0$, $u(h) > 0$ und $u'(h) > 0$
und $u(x)$ nimmt im Intervall $[0, h]$ sowohl positive als auch negative Werte an;

[11]) Vgl. Fußnote [8]).

(b) $u(x) \geqq 0$ für $0 \leqq x \leqq h$ und
$u(0) > 0, \quad u'(0) < 0,$ oder [12])
$u(h) > 0, \quad u'(h) > 0;$

(b') $u(x) \leqq 0$ für $0 \leqq x \leqq h$ und
$u(0) < 0, \quad u'(0) > 0,$ oder
$u(h) < 0, \quad u'(h) < 0;$

(c) $u(x) = 0$ für $0 \leqq x \leqq h.$

Im Falle $\varkappa = 0$ gilt die Behauptung (c).

Beweis. Wir bezeichnen mit $U(\lambda, x)$ die Differenz

$$U(\lambda, x) = E\left(\lambda, T_0(x)\right) - E\left(\lambda, T_1(x)\right). \tag{2.2}$$

Da $E(\lambda, T)$ für positives λ als Funktion von T i.e.S. monoton zunimmt, vgl. § 1.3a), ist

$$\operatorname{sign} u(x) = \operatorname{sign} U(\lambda, x) \quad \text{für alle } \lambda > 0,\ 0 \leqq x \leqq h. \tag{2.3}$$

Mit P und Q bezeichnen wir die beiden Mengen

$$P = \{x \mid x \in (0, h) = J \quad \text{und} \quad u(x) > 0\},$$
$$Q = \{x \mid x \in J \quad \text{und} \quad u(x) < 0\}$$

und machen folgende Fallunterscheidung.

I. Fall: $P \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von $u(x)$ ist P offen, also eindimensional L-meßbar und als Summe höchstens abzählbar vieler punktfremder offener Intervalle darstellbar:

$$P = \sum_1^N {}_\nu (x_{\nu 0}, x_{\nu 1}),$$

wobei N eine natürliche Zahl oder das Symbol ∞ bedeutet.

Als stetige nichtnegative Lösung der Gl. (1.1) befriedigt $T_0(x)$ bzw. $T_1(x)$ auch die Gl. (1.14), weshalb mit (2.1) und (2.2) für $0 \leqq x \leqq h$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_0^h k^2(\lambda) K_0\left(k(\lambda)\,|x - t|\right) U(\lambda, t)\, dt\, d\lambda + 2 \int_0^\infty k(\lambda)\, U(\lambda, x)\, d\lambda = \frac{\varkappa}{2\pi n^2} u''(x). \tag{2.4}$$

Nach Hilfsatz 1 und 3 sind die Summanden der Gl. (2.4) stetige Funktionen von x, also über P L-integrabel. Da die Integrale der Gl. (2.4) als L-Integrale existieren, können wir den Satz von Fubini anwenden[13]):

$$\left\{ \int_0^\infty \int_0^h \int_P k^2(\lambda) K_0\left(k(\lambda)\,|x - t|\right) \cdot U(\lambda, t)\, dx\, dt\, d\lambda + \right.$$
$$\left. + 2 \int_0^\infty \int_P k(\lambda)\, U(\lambda, x)\, dx\, d\lambda = \frac{\varkappa}{2\pi n^2} \cdot \int_P u''(x)\, dx. \right. \tag{2.5}$$

[12]) „oder" ist hier und im folgenden nicht im ausschließenden Sinne zu verstehen.

[13]) Vgl. Fußnote [9]) auf S. 361; die dort vorausgesetzte Eigenschaft des Integranden, sein Vorzeichen nicht zu wechseln, erfüllen wir hier durch die in (2.2) gegebene additive Aufspaltung von $U(\lambda, t)$.

Mit der Bezeichnung

$$F(\lambda,t)=\int_P k(\lambda)\cdot K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,dx \tag{2.6}$$

können wir (2.5) wegen

$$\begin{aligned}\int_0^h F(\lambda,t)\,U(\lambda,t)\,dt+2\int_P U(\lambda,x)\,dx\\ =\int_P\big(2+F(\lambda,x)\big)\,U(\lambda,x)\,dx+\int_{J-P}F(\lambda,x)\,U(\lambda,x)\,dx\end{aligned}$$

auch in der Form wiedergeben:

$$\left\{\begin{aligned}\int_0^\infty k(\lambda)\cdot\Big\{\int_P\big(2+F(\lambda,x)\big)\,U(\lambda,x)\,dx+\int_{J-P}F(\lambda,x)\,U(\lambda,x)\,dx\Big\}\,d\lambda\\ =\frac{\varkappa}{2\pi n^2}\int_P u''(x)\,dx.\end{aligned}\right. \tag{2.7}$$

A. Die Eigenschaft der Volladditivität des L-Integrals wenden wir auf (2.6) an:

$$F(\lambda,t)=\sum_1^N{}^{\nu}\int_{x_{\nu 0}}^{x_{\nu 1}}k(\lambda)\cdot K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,dx=\sum_1^N{}^{\nu}f_\nu(\lambda,t),$$

wobei nach (1.8) und (1.8′)

$$f_\nu(\lambda,t)=\begin{cases}K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\nu 1}-t)\big)-K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\nu 0}-t)\big), & \text{falls } 0\le t\le x_{\nu 0},\\ K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\nu 0})\big)+K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\nu 1}-t)\big)-2, & \text{falls } x_{\nu 0}\le t\le x_{\nu 1},\\ K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\nu 0})\big)-K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\nu 1})\big), & \text{falls } x_{\nu 1}\le t\le h.\end{cases} \tag{2.8}$$

Die Reihe $\sum_1^N{}^{\nu} f_\nu(\lambda,t)$ konvergiert absolut, da für alle ν $f_\nu(\lambda,t)\le 0$ ist; sie kann also umgeordnet werden:

$$F(\lambda,t)=\begin{cases}\sum_{t\le x_{\nu 0}}^{\nu} f_\nu(\lambda,t)+\sum_{x_{\varrho 1}\le t}^{\varrho} f_\varrho(\lambda,t), & \text{falls } t\notin P,\\ \sum_{x_{\varrho 1}\le t}^{\varrho} f_\varrho(\lambda,t)+\sum_{t\le x_{\nu 0}}^{\nu} f_\nu(\lambda,t)+f_\tau(\lambda,t), & \text{falls } x_{\tau 0}<t<x_{\tau 1}.\end{cases} \tag{2.9}$$

Da bei festem $\lambda\ge 0$ und $t\in[0,h]$ $K_1\big(k(\lambda)\,(x-t)\big)$ eine für $t\le x\le h$ monoton abnehmende, $K_1\big(k(\lambda)\,(t-x)\big)$ eine für $0\le x\le t$ monoton zunehmende Funktion von x ist, vgl. (1.7), wird für $x_{\tau 0}<t<x_{\tau 1}$

$$\left\{\begin{aligned}&K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\tau 1}-t)\big)+\sum_{t<x_{\nu 0}}^{\nu}\Big\{K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\nu 1}-t)\big)-K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\nu 0}-t)\big)\Big\}\\ &\qquad\ge K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\tau 1}-t)\big)+K_1\big(k(\lambda)\,(h-t)\big)-K_1\big(k(\lambda)\,(x_{\tau 1}-t)\big)\\ &\qquad=K_1\big(k(\lambda)\,(h-t)\big)>0 \qquad \text{und}\\ &K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\tau 0})\big)+\sum_{x_{\varrho 1}\le t}^{\varrho}\Big\{-K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\varrho 1})\big)+K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\varrho 0})\big)\Big\}\\ &\qquad\ge K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\tau 0})\big)+K_1\big(k(\lambda)\,t\big)-K_1\big(k(\lambda)\,(t-x_{\tau 0})\big)\\ &\qquad=K_1\big(k(\lambda)\,t\big)>0.\end{aligned}\right. \tag{2.10}$$

Für beliebiges nichtnegatives λ folgt aus (2.6)

$$F(\lambda, x) \leq 0, \quad \text{falls} \quad x \in J, \tag{2.11}$$

aus (2.8), (2.9) und (2.10)

$$2 + F(\lambda, x) > 0, \quad \text{falls} \quad x \in P. \tag{2.12}$$

Nach Definition von P war

$$u(x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x \in P, \\ \leq 0 & \text{für} \quad x \in J - P, \end{cases}$$

also ist nach (2.3) für alle positiven λ

$$U(\lambda, x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x \in P, \\ \leq 0 & \text{für} \quad x \in J - P. \end{cases} \tag{2.13}$$

Mit (2.11), (2.12) und (2.13) erhalten wir wegen der Voraussetzungen über $k(\lambda)$:

$$\int_0^\infty k(\lambda) \left\{ \int_P \left(2 + F(\lambda, x)\right) U(\lambda, x)\, dx + \int_{J-P} F(\lambda, x)\, U(\lambda, x)\, dx \right\} d\lambda > 0. \tag{2.14}$$

Falls $\varkappa = 0$ ist, widerspricht (2.14) der Gl. (2.7), weshalb für $\varkappa = 0$ der Fall $P \neq \emptyset$ nicht eintreten kann. Betrachten wir also weiter den Fall $\varkappa > 0$.

B. Für alle ν, für die $x_{\nu 0} > 0$ und $x_{\nu 1} < h$ ist, wird

$$\int_{x_{\nu 0}}^{x_{\nu 1}} u''(x)\, dx = u'(x_{\nu 1}) - u'(x_{\nu 0}) \leq 0,$$

da $u''(x)$ stetig ist und nach Definition der $x_{\nu i}$

$$u(x_{\nu 0}) = u(x_{\nu 1}) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < x_{\nu 0},\ x_{\nu 1} < h$$

und

$$u(x) > 0 \quad \text{für} \quad x_{\nu 0} < x < x_{\nu 1}.$$

Nach (2.7) und (2.14) wird aber

$$\int_P u''(x)\, dx = \sum_1^N{}_\nu \int_{x_{\nu 0}}^{x_{\nu 1}} u''(x)\, dx > 0;$$

deshalb muß für eines der ν, etwa $\nu = p$,

$$x_{p0} = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{x_{p1}} u''(x)\, dx = u'(x_{p1}) - u'(0) > 0 \tag{2.15}$$

oder, etwa für $\nu = q$,

$$x_{q1} = h \quad \text{und} \quad \int_{x_{q0}}^{h} u''(x)\, dx = u'(h) - u'(x_{q0}) > 0 \tag{2.16}$$

sein. Nach Definition von P wird dann außerdem

$$u(x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < x_{p1} \quad \text{bzw.} \quad x_{q0} < x < h \tag{2.17}$$

und $u(x_{p1}) = 0$ bzw. $u(x_{q0}) = 0$, also $u'(x_{p1}) \leqq 0$ bzw. $u'(x_{q0}) \geqq 0$. Daraus folgt aber mit (2.15) und (2.16)

$$u'(0) < 0 \quad \text{bzw.} \quad u'(h) > 0. \tag{2.18}$$

Die Ungleichungen (2.17) und (2.18) sind nur dann verträglich, wenn

$$u(0) > 0 \quad \text{bzw.} \quad u(h) > 0$$

ist. Es ergibt sich also für $u(x)$ die Bedingung:

$$\begin{cases} u(0) > 0 \quad \text{und} \quad u'(0) < 0 \quad \text{oder} \\ u(h) > 0 \quad \text{und} \quad u'(h) > 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Falls nun die Menge Q leer ist, beschreibt (2.19) den Fall (b) der Behauptung. Ist Q nicht leer, so stellen wir die obige Betrachtung auch für $\bar{u}(x) = -u(x)$ an und erhalten

$$u(0) < 0 \quad \text{und} \quad u'(0) > 0$$

oder

$$u(h) < 0 \quad \text{und} \quad u'(h) < 0,$$

was zusammen mit (2.19) die Fälle (a) und (a') der Behauptung beschreibt.

II. Fall: $P = \emptyset$ und $Q \neq \emptyset$. Diesen Fall führen wir durch Betrachtung der Funktion $\bar{u}(x) = -u(x)$ auf den Fall I zurück und erhalten: Für $\varkappa = 0$ ist auch dieser Fall unmöglich, für $\varkappa > 0$ gilt die Behauptung (b').

III. Fall: $P = Q = \emptyset$. Dieser Fall entspricht der Behauptung (c), da wegen der Stetigkeit von $u(x)$ dann auch $u(0) = u(h) = 0$ ist.

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen.

2.2. Die Eindeutigkeitssätze

Satz 1 (*Eindeutigkeitssatz für den Fall $\varkappa = 0$*): *Falls $\varkappa = 0$ ist, gibt es höchstens eine stetige und nichtnegative Lösungsfunktion der Gl.* (1.1) [14].

Beweis. Die Aussage ist bereits im Lemma enthalten.

Anmerkung. Beim Beweis des Lemmas hatten wir uns nicht der Gl. (1.1), sondern der Gl. (1.14) bedient. Unter Berücksichtigung des Korollars von S. 362 können wir somit für die Gl. (1.14) die schärfere Aussage folgern: Falls $\varkappa = 0$ ist, gibt es höchstens eine L-integrable, beschränkte, nichtnegative Lösungsfunktion der Gl. (1.14).

Satz 2 (*Eindeutigkeitssatz für den Fall $\varkappa > 0$*): *Falls $\varkappa > 0$ ist, wird eine nichtnegative Lösungsfunktion der Gl.* (1.1) *eindeutig durch jedes der vier Parameterpaare bestimmt:*

(1) *Die beiden Randwerte $T(0)$ und $T(h)$,*

(2) *einen der Randwerte $T(0)$ oder $T(h)$ und die Konstante E_g,*

[14]) Man beachte, daß unserer Problemstellung entsprechend die Konstante E_g nicht vorgegeben, sondern erst durch die Lösung bestimmt wird.

(3) *einen der Randwerte* $T(0)$ *oder* $T(h)$ *und einen der Ableitungsrandwerte* $T'(0)$ *oder* $T'(h)$,

(4) *die beiden Ableitungsrandwerte* $T'(0)$ *und* $T'(h)$.

Wir bemerken, daß wohl die Behauptung bezüglich der Paare (1) bis (3), nicht aber bezüglich des Paares (4) den Eindeutigkeitsaussagen über eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung entspricht.

Beweis. Es seien $T_0(x)$ und $T_1(x)$ zwei nichtnegative Lösungsfunktionen von (1.1). Die Voraussetzungen des Lemmas sind erfüllt, also muß $u(x) = T_0(x) - T_1(x)$ einer der fünf Behauptungen (a) bis (c) des Lemmas genügen. Der Reihe nach wird nun vorausgesetzt, daß die Lösungsfunktionen $T_0(x)$ und $T_1(x)$ in den Parameterpaaren (1) bis (4) übereinstimmen:

(1) Da $u(0) - u(h) = 0$ ist, kann nur die Aussage (c) des Lemmas gelten: $T_0(x) = T_1(x)$ für $0 \leq x \leq h$.

(2) Da $u(0) = 0$ oder $u(h) = 0$ ist, können nur die Fälle (b), (b') oder (c) des Lemmas zutreffen. Aus (1.1) folgt wegen $E_{g0} = E_{g1}$:

$$\frac{\varkappa}{2\pi n^2} u'(0) = -\int_0^\infty \int_0^h k(\lambda)\, K_1\big(k(\lambda)\, t\big)\, U(\lambda, t)\, dt\, d\lambda \tag{2.20}$$

und

$$\frac{\varkappa}{2\pi n^2} u'(h) = \int_0^\infty \int_0^h k(\lambda)\, K_1\big(k(\lambda)\,(h-t)\big)\, U(\lambda, t)\, dt\, d\lambda. \tag{2.21}$$

Im Falle (b) ist nun $u(0) > 0$ oder $u(h) > 0$ und $u(x) \geqq 0$ für $0 \leq x \leq h$; also wird wegen $K_1(t) > 0$ und (2.3) die rechte Seite der Gl. (2.20) negativ, die der Gl. (2.21) positiv:

$$u'(0) < 0 \quad \textit{und} \quad u'(h) > 0.$$

Da andrerseits $u(0) = 0$ oder $u(h) = 0$ sein soll, kann die Bedingung „$u(x) \geqq 0$ für $0 \leq x \leq h$“ und damit (b) nicht erfüllt sein. $u(x)$ kann auch (b') nicht genügen, wie man durch Umkehrung aller Ungleichheitszeichen in obiger Betrachtung einsieht. Somit bleibt nur die Möglichkeit (c).

(3) Wie im Falle (2) kann auch hier $u(x)$ höchstens die Behauptungen (b), (b') oder (c) des Lemmas erfüllen. Ist

$$u(0) = 0 \quad \text{und} \quad u'(h) = 0$$

oder

$$u(h) = 0 \quad \text{und} \quad u'(0) = 0,$$

so kann nur die Behauptung (c) des Lemmas zutreffen.

Es sei nun

$$u(0) = u'(0) = 0. \tag{2.22}$$

Würde dann (b) gelten, so wäre

$$u(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq h \quad \text{und} \quad u(h) > 0, \tag{2.23}$$

also wegen (1.14), (2.3), $u(0)=0$ und $K_0(t)<0$:

$$\frac{\varkappa}{2\pi n^2}u''(0)=\int_0^\infty\int_0^h k^2(\lambda)\,K_0\big(k(\lambda)\,t\big)\,U(\lambda,t)\,dt\,d\lambda<0. \tag{2.24}$$

Da $u''(x)$ stetig ist, folgt daraus mit (2.22), daß $u(x)$ in einer rechtsseitigen Umgebung von $x=0$ negativ wird, im Widerspruch zu (2.23).

Würde (b') gelten, so wäre

$$u(x)\leqq 0 \quad \text{für} \quad 0\leqq x\leqq h \quad \text{und} \quad u(h)<0, \tag{2.25}$$

andrerseits aber, (2.24) entsprechend, $u''(0)>0$, und damit wegen (2.22) $u(x)$ in einer rechtsseitigen Umgebung von $x=0$ positiv, im Widerspruch zu (2.25).

Analog oder durch Betrachtung von $v(x)=u(h-x)$ können wir die Annahme zum Widerspruch führen, daß $u(x)$ im Falle

$$u(h)=u'(h)=0$$

der Behauptung (b) oder (b') des Lemmas genügt.

Es bleibt also auch hier nur die Möglichkeit (c): $T_0(x)\equiv T_1(x)$.

(4) Wegen $u'(0)=u'(h)=0$ kann nur der Fall (c) des Lemmas eintreten.

§ 3. Der Existenzbeweis für den Fall fehlenden Differentialbestandteils ($\varkappa=0$)

Der Fall $\varkappa=0$ entspricht physikalisch dem Fall reiner Wärmestrahlung. Der Differentialbestandteil fällt aus der Gl. (1.1) heraus, so daß wir es mit einer reinen nichtlinearen Integralgleichung erster Art zu tun haben.

In dem trivialen Fall, in dem auch $k(\lambda)\equiv 0$ wird, geht die zu lösende Gl. (1.1) vermittels (1.6) und (1.10) in die Gleichung

$$E_g=2\pi n^2\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\big[E(\lambda,T_0)-E(\lambda,T_h)\big]\,d\lambda=\sigma n^2(T_0^4-T_h^4)$$

über, wird also von jeder beliebigen Funktion $T(x)$ gelöst. Physikalisch ist dieser Fall als Wärmestrahlung durch das Vakuum zu interpretieren, in dem „Temperatur" ja nicht definiert werden kann. Wir betrachten also weiterhin den nichttrivialen Fall $k(\lambda)\not\equiv 0$ [vgl. Fußnote 8 von S. 358].

3.1. Der Existenzbeweis

An Stelle der Gl. (1.1) behandeln wir die äquivalente Gl. (1.14), da diese eine Gleichung zweiter Art ist:

$$\Phi\big(T(x)\big)=F(x)-\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^h k^2(\lambda)\,K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda,T(t)\big)\,dt\,d\lambda, \tag{3.1}$$

wobei

$$F(x)=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty k(\lambda)\big\{K_1\big(k(\lambda)\,x\big)\,E(\lambda,T_0)+K_1\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)\,E(\lambda,T_h)\big\}\,d\lambda$$

und [vgl. (1.11)]

$$\Phi(x) = \int_0^\infty k(\lambda)\, E(\lambda, x)\, d\lambda$$

bedeuten. Den durch das Doppelintegral der rechten Seite von (3.1) dargestellten Funktionaloperator wollen wir durch das Symbol $J_x[T]$ abkürzen.

Unser Ziel wird es nunmehr sein, die Lösung durch ein Iterationsverfahren zu konstruieren. Auf die in § 1.1 geforderten Randbedingungen $T(0) = R_0$ und $T(h) = R_h$ müssen und können wir dabei nicht achten, da nach Satz 1 die Lösungsfunktion schon durch die in die Gl. (3.1) eingehenden Parameter eindeutig bestimmt ist.

Ist $f(x)$ eine beliebige, über $0 \leq x \leq h$ stetige und nichtnegative Funktion, so ist

$$J_x[f] \leq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq h,$$

da $K_0(t)$ negativ und $E(\lambda, f)$ nichtnegativ ist, vgl. (1.6) und (1.9). Weil $K_1(t)$ außerdem positiv ist, wird

$$F(x) - \tfrac{1}{2} J_x[f] \geq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq h.$$

Somit ordnet nach Hilfsatz 1 und 3 die Vorschrift

$$g(x) = \Phi^{-1}\left(F(x) - \tfrac{1}{2} J_x[f]\right) \qquad (0 \leq x \leq h) \tag{3.2}$$

der Funktion $f(x)$ eindeutig eine stetige und nichtnegative Funktion $g(x)$ zu, die mit $A_x[f]$ bezeichnet werden soll.

Über die Zuordnung A können wir folgendes aussagen:

Hilfsatz 5. Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei stetige Funktionen über $[0, h]$, die die Ungleichung

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \qquad (0 \leq x \leq h)$$

erfüllen, so gilt für ihre J- und A-Bilder

$$J_x[f_2] \leq J_x[f_1] \leq 0 \leq A_x[f_1] \leq A_x[f_2] \qquad (0 \leq x \leq h),$$

d.h. J ist ein monoton abnehmender, A ein monoton zunehmender Operator.

Beweis. Die Aussage für den Operator J folgt aus $K_0(t) < 0$, $E_x(\lambda, x) > 0$ und $J_x[0] = 0$. Damit trifft aber wegen der Monotonie von Φ^{-1} (vgl. Hilfsatz 1) auch die Behauptung über den Operator A zu.

Hilfsatz 6. Ist $f(x)$ eine über $[0, h]$ stetige Funktion, die der Ungleichung

$$0 \leq f(x) \leq \operatorname{Max}(T_0, T_h) = S \qquad (0 \leq x \leq h)$$

bzw.

$$0 \leq s = \operatorname{Min}(T_0, T_h) \leq f(x) \qquad (0 \leq x \leq h)$$

genügt, so gilt für ihr A-Bild

$$0 \leq A_x[f] \leq S \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq s \leq A_x[f] \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Beweis. Es sei etwa $0 \leq f(x) \leq S$. Durch Anwendung des Hilfsatzes 5 genügt es zu zeigen, daß $A_x[S] \leq S$ wird. Nun ist nach (1.8)

$$\begin{aligned} F(x) - \tfrac{1}{2} J_x[S] &= \tfrac{1}{2} \int_0^\infty k(\lambda) \Big\{ K_1\big(k(\lambda)\, x\big)\, E(\lambda, T_0) + K_1\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)\, E(\lambda, T_h) - \\ &\quad - \int_0^\infty k(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E(\lambda, S)\, dt \Big\}\, d\lambda \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^\infty k(\lambda) \big\{ 2E(\lambda, S) - K_1\big(k(\lambda)\, x\big) \big[E(\lambda, S) - E(\lambda, T_0)\big] - \\ &\quad - K_1\big(k(\lambda)\,(h-x)\big) \big[E(\lambda, S) - E(\lambda, T_h)\big] \big\}\, d\lambda \\ &\leq \int_0^\infty k(\lambda)\, E(\lambda, S)\, d\lambda = \Phi(S), \end{aligned}$$

da $K_1(t) > 0$ ist; also ist nach Definition (3.2) von A und Hilfsatz 1

$$A_x[S] = \Phi^{-1}\big(F(x) - \tfrac{1}{2} J_x[S]\big) \leq S.$$

Der Beweis für den Fall $0 \leq s \leq f(x)$ verläuft analog.

Wir betrachten nun die durch folgende Definition gegebene Funktionenfolge:

$$(3.3) \qquad \left.\begin{array}{l} f_0(x) = \operatorname{Max}(T_0, T_h) = S, \\ f_n(x) = A_x[f_{n-1}] \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Nach Hilfsatz 6 besteht zwischen $f_0(x)$ und $f_1(x)$ die Ungleichung

$$f_1(x) \leq f_0(x) \qquad (0 \leq x \leq h),$$

also besteht sie nach Hilfsatz 5 für sämtliche Indizes n $(= 0, 1, 2, \ldots)$:

$$(3.4) \qquad f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Da außerdem für $0 \leq x \leq h$

$$\operatorname{Min}(T_0, T_h) \leq \operatorname{Max}(T_0, T_h) = f_0(x)$$

gilt, erfüllen nach Hilfsatz 6 die Funktionen $f_n(x)$ die Ungleichung

$$(3.5) \qquad 0 \leq \operatorname{Min}(T_0, T_h) \leq f_n(x) \qquad (0 \leq x \leq h;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Ungleichungen (3.4) und (3.5) besagen, daß die in (3.3) definierte Folge $\{f_n(x)\}$ eine monoton abnehmende, nach unten beschränkte Funktionenfolge ist, woraus folgt: Die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$ ist eine gegen eine nichtnegative Funktion $T(x)$ konvergierende Folge,

$$(3.6) \qquad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = T(x) \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Da wegen der Stetigkeit der Funktionen $f_n(t)$ (≥ 0)

$$k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, f_n(t)\big)$$

über $(0 \leqq t \leqq h;\ \lambda \geqq 0)$ L-integrabel ist (vgl. Hilfsatz 3), ist nach dem Satz von Lebesgue [15]) auch

$$k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, T(t)\big)$$

über dem genannten Bereich L-integrabel, und zwar ist

$$(3.7)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{h} k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, f_n(t)\big)\, dt\, d\lambda \\ \qquad = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{h} k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, T(t)\big)\, dt\, d\lambda. \end{cases}$$

Nach der Definitionsgleichung (3.3) erfüllen die Funktionen $f_n(t)$ die Gleichung

$$\Phi\big(f_{n+1}(x)\big) = F(x) - \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{h} k^2(\lambda)\, K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, f_n(t)\big)\, dt\, d\lambda,$$

woraus mit (3.7) und der Stetigkeit von Φ folgt: $T(x)$ löst die Gl. (3.1).

Nach dem Satz von Lebesgue ist $T(x)$ selbst eine L-integrable, also nach dem Korollar von S. 362 eine stetige Funktion. Nun behauptet ein bekannter Satz: Eine monotone Folge von über einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktionen, die daselbst gegen eine stetige Funktion konvergiert, konvergiert gleichmäßig. Demnach haben wir, Satz 1 berücksichtigend, folgenden Satz bewiesen:

Satz 3 (*Existenzsatz für den Fall* $\varkappa = 0$): *Die durch* (3.3) *definierte Funktionenfolge konvergiert monoton abnehmend und gleichmäßig gegen die eindeutig bestimmte stetige und nichtnegative Lösungsfunktion* $T(x)$ *der Gl.* (3.1) *und damit* (1.1). *Die Funktion* $T(x)$ *wird beschränkt durch die Konstanten* $\mathrm{Min}\,(T_0, T_h)$ *und* $\mathrm{Max}\,(T_0, T_h)$.

Auf dem gleichen Wege, die Hilfsätze 5 und 6 benutzend, können wir beweisen:

Satz 4: *Ist* $u_0(x)$ *eine stetige Funktion, die für* $0 \leqq x \leqq h$ *folgende beiden Ungleichungen erfüllt:*

$$\mathrm{Min}\,(T_0, T_h) \leqq u_0(x) \leqq \mathrm{Max}\,(T_0, T_h)$$

und

$$u_0(x) \leqq A_x[u_0] \quad \text{bzw.} \quad u_0(x) \geqq A_x[u_0],$$

so konvergiert die Funktionenfolge

$$(3.8)\qquad u_n(x) = A_x[u_{n-1}] \qquad (0 \leqq x \leqq h;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gleichmäßig und monoton zunehmend bzw. abnehmend gegen die stetige und nichtnegative Lösungsfunktion $T(x)$ *der Gl.* (3.1) *und damit* (1.1).

---

[15]) Wir wenden wieder die auf nicht-beschränkte Ordinatenmengen verallgemeinerte Form dieses Satzes an, wie er etwa bei Haupt-Aumann [9]), S. 78, bewiesen ist („Satz von der gliedweisen Integrierbarkeit").

Insbesondere erfüllt die Funktionenfolge

$$\left.\begin{array}{l} g_0(x) = \operatorname{Min}(T_0, T_h) = s, \\ g_n(x) = A_x[g_{n-1}] \qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{array}\right\} \quad (0 \leq x \leq h) \tag{3.9}$$

die Voraussetzungen dieses Satzes, da nach Hilfsatz 6 $s \leq A_x[s]$ wird. Wir kennen also zwei Folgen, die monoton und gleichmäßig gegen die Lösung konvergieren, nämlich die Folge (3.3) von oben, die Folge (3.9) von unten.

3.2. Monotonie und Randwerte der Lösungsfunktion

Falls $T_0 = T_h$ ist, wird die Gl. (3.1) durch die Funktion $T(x) = T_0$ gelöst, da dann nach Hilfsatz 6 sämtliche Funktionen der Folge (3.3) identisch T_0 sind. Wir wollen uns also dem nichttrivialen Fall $T_0 \neq T_h$ zuwenden.

Hilfsatz 7. Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion, die für $0 \leq x \leq h$ der Ungleichung

$$s = \operatorname{Min}(T_0, T_h) \leq f(x) \leq \operatorname{Max}(T_0, T_h) = S \tag{3.10}$$

genügt.

Falls dann $T_0 > T_h$ und $f(x)$ i.w.S. monoton abnehmend ist, wird die Funktion $g(x) = A_x[f]$ i.e.S. monoton abnehmen, und falls $T_0 < T_h$ und $f(x)$ i.w.S. monoton zunehmend ist, wird die Funktion $g(x)$ i.e.S. monoton zunehmen.

Beweis. Es sei $T_0 > T_h$ und $f(x)$ i.w.S. monoton abnehmend. Dann gilt für alle $\lambda \geq 0$ und alle x, δ mit $0 \leq x < x + \delta \leq h$ die Ungleichung

$$\left\{\begin{array}{l} \int_0^h k(\lambda)\,[K_0(k(\lambda)\,|x+\delta-t|) - K_0(k(\lambda)\,|x-t|)]\,E(\lambda, f(t))\,dt \\ \geq E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right) \int_0^h k(\lambda)\,[K_0(k(\lambda)\,|x+\delta-t|) - K_0(k(\lambda)\,|x-t|)]\,dt \\ = E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right)\{K_1(k(\lambda)\,(h-x-\delta)) + K_1(k(\lambda)\,(x+\delta)) - \\ \qquad - K_1(k(\lambda)\,(h-x)) - K_1(k(\lambda)\,x)\}, \end{array}\right. \tag{3.11}$$

da der Wert der eckigen Klammer im Integranden der linken Seite dieser Ungleichung im Intervall $0 \leq t < x + \frac{\delta}{2}$ positiv, für $x + \frac{\delta}{2} < t \leq h$ negativ ist. Mit (3.11) erhalten wir

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi(g(x+\delta)) - \Phi(g(x)) \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty k(\lambda)\left\{\left[E(\lambda, T_h) - E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right)\right] \times \right. \\ \qquad \times [K_1(k(\lambda)\,(h-x-\delta)) - K_1(k(\lambda)\,(h-x))] + \\ \qquad \left. + \left[E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right) - E(\lambda, T_0)\right][K_1(k(\lambda)\,x) - K_1(k(\lambda)\,(x+\delta))]\right\} d\lambda. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Wegen $E_T(\lambda, T) > 0$ und (3.10) ist sowohl

$$E(\lambda, T_h) - E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right) \leq 0 \quad \text{als auch} \quad E\left(\lambda, f\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right) - E(\lambda, T_0) \leq 0$$

und mindestens einer der beiden Ausdrücke für $\lambda > 0$ negativ, da ja $T_0 \neq T_h$. Weil $K_1(t)$ i.e.S. monoton abnimmt, folgt daraus, daß für alle positiven λ mit $k(\lambda) > 0$ der Integrand der rechten Seite von (3.12) negativ wird, also

$$\Phi\big(g(x+\delta)\big) < \Phi\big(g(x)\big),$$

d.h. wegen der Monotonie von Φ^{-1} (vgl. Hilfsatz 1): $g(x)$ nimmt i.e.S. monoton ab. Analog wird der Beweis für den Fall $T_0 < T_h$ geführt.

Satz 5 (*Monotoniesatz für den Fall* $\varkappa = 0$). *Ist* $T_0 > T_h$ *bzw.* $T_0 < T_h$, *so nimmt die Lösungsfunktion* $T(x)$ *der Gl.* (3.1) *i.e.S. monoton ab bzw. zu.*

Beweis. Wir benutzen die Konstruktion der Lösung durch die Folge (3.3). Es sei etwa $T_0 > T_h$. Die Funktion $f_0(x) \equiv T_0$ nimmt i.w.S. monoton ab, weshalb wegen Hilfsatz 7 sämtliche Funktionen $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i.e.S. abnehmen und damit die Limesfunktion $T(x)$ i.w.S.; also nimmt nach Hilfsatz 7 auch die Funktion $A_x[T] = T(x)$ i.e.S. monoton ab. Ebenso schließen wir im Falle $T_0 > T_h$.

Vom physikalischen Standpunkt interessieren die Randwerte der Lösungsfunktion, insbesondere die Frage, ob $T(0) = T_0$ und $T(h) = T_h$ ist. Abgesehen vom trivialen Fall $T_0 = T_h$ werden wir diese Frage verneinen. Es sei etwa $T_0 > T_h$. Dann wird für die nach Satz 5 i.e.S. monoton abnehmende Lösungsfunktion $T(x)$

$$(3.13)\quad \begin{cases} \Phi\big(T(0)\big) - \Phi(T_0) \\ = \frac{1}{2}\int_0^\infty k(\lambda)\Big\{K_1\big(k(\lambda)h\big)E(\lambda, T_h) - E(\lambda, T_0) - \int_0^h k(\lambda)K_0\big(k(\lambda)t\big)E\big(\lambda, T(t)\big)\,dt\Big\}d\lambda \\ < \frac{1}{2}\int_0^\infty k(\lambda)\Big\{K_1\big(k(\lambda)h\big)E(\lambda, T_h) - E(\lambda, T_0) - E\big(\lambda, T(0)\big)\int_0^h k(\lambda)K_0\big(k(\lambda)t\big)\,dt\Big\}d\lambda \\ = \frac{1}{2}\int_0^\infty k(\lambda)\cdot\Big\{K_1\big(k(\lambda)h\big)\big[E(\lambda, T_h) - E\big(\lambda, T(0)\big)\big] + E\big(\lambda, T(0)\big) - E(\lambda, T_0)\Big\}d\lambda. \end{cases}$$

Aus (3.13) folgt wegen $T_0 > T_h$ und $T_0 \geqq T(0) \geqq T_h$, daß

$$\Phi(T_0) > \Phi\big(T(0)\big), \quad \text{also} \quad T_0 > T(0)$$

ist.

Außerdem erhalten wir die Abschätzung

$$\int_0^\infty k(\lambda)\big[1 + K_1\big(k(\lambda)h\big)\big]E\big(\lambda, T(0)\big)\,d\lambda < \int_0^\infty k(\lambda)\big[E(\lambda, T_0) + K_1\big(k(\lambda)h\big)\cdot E(\lambda, T_h)\big]\,d\lambda.$$

Ebenso können wir zeigen, daß $T(h) > T_h$ ist und

$$\int_0^\infty k(\lambda)\big[1 + K_1\big(k(\lambda)h\big)\big]E\big(\lambda, T(h)\big)\,d\lambda > \int_0^\infty k(\lambda)\big[E(\lambda, T_h) + K_1\big(k(\lambda)h\big)E(\lambda, T_0)\big]\,d\lambda.$$

3.3. Resultate für den Spezialfall konstanter Absorptionsfunktion

Ist die Funktion $k(\lambda)$ konstant und positiv, so geht mit (1.10) die Gl. (3.1) in die für $y(z) = T^4\left(\frac{z}{k}\right)$ lineare Integralgleichung

$$2y(z) = y_0 K_1(z) + y_l K_1(l-z) - \int_0^l K_0(|z-s|)\, y(s)\, ds$$

über, wobei $l = k\,h$, $y_0 = T_0^4$ und $y_l = T_h^4$ ist. Für die iterierten Kerne

$$K^{(1)}(z,t) = \int_0^l K_0(|z-s|)\, K_0(|s-t|)\, ds, \quad K^{(n)}(z,t) = \int_0^l K_0(|z-s|)\, K^{(n-1)}(s,t)\, ds$$

$(n = 2, 3, \ldots)$ gilt:

$$|K^{(n)}(z,t)| \leq M \cdot C^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit

$$M = 2\int_0^{l/2} K_0\left(\frac{l}{2} - t\right) dt \quad \text{und} \quad C = 2\left[1 - K_1\left(\frac{l}{2}\right)\right] < 2;$$

deshalb läßt sich die Lösung durch die gleichmäßig konvergente Resolvente

$$R(z,t) = K_0(|z-t|) + \sum_1^\infty n\, \frac{1}{2^n}\, |K^{(n)}(z,t)|$$

darstellen $(0 \leq z \leq l)$:

$$\text{(R)} \quad y(z) = \tfrac{1}{2}\left[y_0 K_1(z) + y_l K_1(l-z)\right] - \tfrac{1}{4}\int_0^l R(z,t)\left[y_0 K_1(t) + y_l K_1(l-t)\right] dt.$$

Aus dieser Darstellung können wir ersehen, daß $y(z)$ bezüglich $z = l/2$ antisymmetrisch ist:

$$y(z) - y\left(\frac{l}{2}\right) = y\left(\frac{l}{2}\right) - y(l-z) \qquad (0 \leq z \leq l)$$

und die Lösung auch in der Form

$$y(z) = \tfrac{1}{2}(y_0 + y_l) + \tfrac{1}{2}\left((y_0 - y(0)\right) \int_{l/2}^z \left[R(t,0) - R(t,l)\right] dt$$

dargestellt werden kann. Weiter gestattet uns (R) einen Vergleich der Lösung $y(z)$ mit der linearen Funktion $L(z) = y_0 + \frac{z}{l}(y_l - y_0)$:

$$\left| y(z) - y\left(\frac{l}{2}\right) \right| \leq \left| L(z) - \frac{1}{2}(y_0 + y_l) \right| \qquad (0 \leq z \leq l),$$

was zu einer Abschätzung der Konstanten E_g verhilft:

$$|y_0 - y_l| \left| K_2\left(\frac{l}{2}\right) \right| \leq |E_g| \frac{1}{2\sigma n^2} \leq |y_0 - y_l| \frac{2}{l}\left[K_3(0) - K_3\left(\frac{l}{2}\right)\right].$$

§ 4. Der Existenzbeweis für den allgemeinen Fall ($\varkappa > 0$)

Im Falle $k(\lambda) \equiv 0$, also bei reiner Wärmeleitung, wird das Problem bekanntlich sehr einfach; die Gl. (1.14) geht dann nämlich in die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung $T''(x) = 0$ über. Wir wollen uns also

dem nichttrivialen Fall $k(\lambda) \not\equiv 0$ [16]) zuwenden, der physikalisch eine echte Überlagerung von Wärmeleitung und -strahlung beschreibt.

4.1. Der Existenzbeweis

Die zu lösende Gleichung behandeln wir in der Form (1.13), die keine Ableitung von $T(x)$ mehr enthält, dafür aber zwei freie Integrationskonstanten. Unsere Aufgabe ist es dann, zu nichtnegativen Konstanten T_0, T_h, R_0, R_h, $\varkappa > 0$, $k(\lambda) \geqq 0$ und $\not\equiv 0$, $h > 0$ eine stetige nichtnegative Funktion $T(x)$ und zwei Konstanten E und D zu finden, die für $0 \leqq x \leqq h$ der Gleichung

$$(4.1)\quad \begin{cases} T(x) = E\,x + D - M \int\limits_0^\infty \frac{1}{k(\lambda)} \Big\{ \Big[K_3\big(k(\lambda)\,(h-x)\big) - \frac{1}{3} \Big] E(\lambda, T_h) + \\ + \Big[K_3\big(k(\lambda)\,x\big) - \frac{1}{3} \Big] E(\lambda, T_0) \Big\}\, d\lambda + M \int\limits_0^\infty \int\limits_0^h K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big) E\big(\lambda, T(t)\big)\, dt\, d\lambda \end{cases}$$

genügt. Dabei wurde

$$E = -\frac{E_g}{\varkappa}, \qquad D = -\frac{D_0}{\varkappa} \qquad \text{und} \qquad M = \frac{2\pi n^2}{\varkappa} > 0$$

gesetzt. Außerdem soll $T(x)$ die Randwerte

$$T(0) = R_0 \qquad \text{und} \qquad T(h) = R_h$$

annehmen.

Zum Nachweis der Existenz einer solchen Lösungsfunktion betrachten wir den Funktionenraum $\mathfrak{C}$ der über dem Intervall $0 \leqq x \leqq h$ definierten und stetigen Funktionen $f(x)$ mit der Metrik

$$(4.2)\qquad D(f, g) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq h} |f(x) - g(x)| \qquad (f, g \in \mathfrak{C}).$$

Dieser Raum $\mathfrak{C}$ ist bekanntlich (vgl. [1]) ein Banach-Raum. Aus diesem Banach-Raum greifen wir eine Teilmenge $\mathfrak{F}$ heraus:

Definition. $\mathfrak{F}$ ist die Teilmenge derjenigen Elemente $f(x)$ des Raumes $\mathfrak{C}$, die für $0 \leqq x \leqq h$ der Ungleichung

$$(4.3)\qquad b = \operatorname{Min}(T_0, T_h, R_0, R_h) \leqq f(x) \leqq \operatorname{Max}(T_0, T_h, R_0, R_h) = B$$

genügen.

Über dem Teilraum $\mathfrak{F}$ interessiert uns folgende Abbildung U:

Definition. Ist $f(x)$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{F}$, so bezeichnet $u(x) = U_x[f]$ die durch die Gleichung

$$(4.4)\quad \begin{cases} u(x) = G(x) + M \int\limits_0^\infty \int\limits_0^h \Big\{ K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big) - K_2\big(k(\lambda)\,t\big) + \\ + \frac{x}{h} \big[K_2\big(k(\lambda)\,t\big) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-t)\big) \big] \Big\} E\big(\lambda, f(t)\big)\, dt\, d\lambda \end{cases}$$

[16]) Vgl. Fußnote [8]).

bestimmte Funktion, wobei $G(x)$ die von $f(x)$ unabhängige Funktion

$$(4.5)\quad \begin{cases} G(x) = R_0 + \frac{x}{h}(R_h - R_0) - M\int\limits_0^\infty \frac{1}{k(\lambda)}\Big\{\Big[K_3\big(k(\lambda)(h-x)\big) - \frac{1}{3}\Big]\times \\ \qquad \times E(\lambda, T_h) + \Big[K_3\big(k(\lambda)\,x\big) - \frac{1}{3}\Big]E(\lambda, T_0) - \\ \qquad - \Big[K_3\big(k(\lambda)\,h\big) - \frac{1}{3}\Big]\cdot\Big[E(\lambda, T_h) + \frac{x}{h}\big(E(\lambda, T_0) - E(\lambda, T_h)\big)\Big]\Big\}\,d\lambda \end{cases}$$

darstellt.

Die Existenz der in (4.4) und (4.5) auftretenden Integrale ist durch die Erörterungen des § 1 gesichert. Darüber hinaus geht aus diesen hervor, daß $u(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist, und zwar ist (vgl. Hilfsatz 2 und 4):

$$(4.6)\quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{h}(R_h - R_0) - M\int\limits_0^\infty \Big\{K_2\big(k(\lambda)\,x\big)E(\lambda, T_0) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)\times \\ \qquad \times E(\lambda, T_h) - \frac{1}{h\,k(\lambda)}\Big[K_3\big(k(\lambda)\,h\big) - \frac{1}{3}\Big]\Big[E(\lambda, T_0) - E(\lambda, T_h)\Big]\Big\}d\lambda + \\ \qquad + M\int\limits_0^\infty\int\limits_0^h \Big\{\operatorname{sign}(x-t)\,k(\lambda)\,K_1\big(k(\lambda)\,|x-t|\big) + \\ \qquad + \frac{1}{h}\big[K_2\big(k(\lambda)\,t\big) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-t)\big)\big]\Big\}E\big(\lambda, f(t)\big)\,dt\,d\lambda, \end{cases}$$

und

$$(4.7)\quad \begin{cases} u''(x) = M\int\limits_0^\infty k(\lambda)\Big\{2E\big(\lambda, f(x)\big) + \int\limits_0^h k(\lambda)\,K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\,E\big(\lambda, f(t)\big)\,dt - \\ \qquad - K_1\big(k(\lambda)\,x\big)\,E(\lambda, T_0) - K_1\big(k(\lambda)\,(h-x)\big)\,E(\lambda, T_h)\Big\}\,d\lambda. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich insbesondere, daß $u(x)$ über $[0, h]$ stetig ist; also bildet die Abbildung U die Menge $\mathfrak{F}$ in die Menge $\mathfrak{C}$ ab:

$$(4.8)\qquad U[\mathfrak{F}] \subseteq \mathfrak{C}.$$

Ist $T(x)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}$, die für $0 \leq x \leq h$ der Gleichung $U_x[T] = T(x)$ genügt, die also Fixpunkt der Abbildung U ist, so erfüllt $T(x)$ auch die Gl. (4.1), und zwar mit den Konstanten

$$E = \frac{1}{h}\Big\{R_h - R_0 + M\int\limits_0^\infty \frac{1}{k(\lambda)}\Big[K_3\big(k(\lambda)\,h\big) - \frac{1}{3}\Big]\big[E(\lambda, T_0) - E(\lambda, T_h)\big]\,d\lambda + \\ + M\int\limits_0^\infty\int\limits_0^h \big[K_2\big(k(\lambda)\,t\big) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-t)\big)\big]\,E\big(\lambda, T(t)\big)\,dt\,d\lambda\Big\}$$

und

$$D = R_0 + M\int\limits_0^\infty \frac{1}{k(\lambda)}\Big[K_3\big(k(\lambda)\,h\big) - \frac{1}{3}\Big]E(\lambda, T_h)\,d\lambda - \\ - M\int\limits_0^\infty\int\limits_0^h K_2\big(k(\lambda)\,t\big)\,E\big(\lambda, T(t)\big)\,dt\,d\lambda.$$

Die Lösung der Gl. (4.1) ist somit auf ein Fixpunktproblem zurückgeführt.

Wir beabsichtigen nun, einen von J. SCHAUDER [9] aufgestellten Fixpunktsatz für Funktionalräume auf das Problem anzuwenden. Da sich die Voraussetzungen dieses Satzes für die Abbildung U nicht beweisen ließen, ändern wir die Abbildung U zu einer Abbildung V ab:

Definition. Ist $f(x)$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{F}$, so bezeichne $v(x) = V_x[f]$ die durch folgende Vorschrift gegebene Funktion über $[0, h]$:

$$(4.9) \qquad v(x) = \begin{cases} u(x) = U_x[f] & \text{für alle } x \in [0,h] \text{ mit } b \leqq u(x) \leqq B, \\ B & \text{für alle } x \in [0,h] \text{ mit } u(x) > B, \\ b & \text{für alle } x \in [0,h] \text{ mit } b > u(x), \end{cases}$$

wobei wie in (4.3)

$$b = \operatorname{Min}(T_0, T_h, R_0, R_h) \quad \text{und} \quad B = \operatorname{Max}(T_0, T_h, R_0, R_h).$$

I. Eigenschaften der Abbildung V.

(a) V ist eine Abbildung von $\mathfrak{F}$ in sich: $\mathfrak{V} = V[\mathfrak{F}] \subseteq \mathfrak{F}$ [17]).

Denn für $f \in \mathfrak{F}$ ist nach (4.8) die Funktion $u(x) = U_x[f]$, mit ihr also auch die Funktion $v(x) = V_x[f]$ stetig; außerdem geht aus (4.9) unmittelbar hervor, daß sämtliche Werte der Funktion v im Intervall $[b, B]$ liegen.

(b) V ist eine stetige Abbildung.

Beweis. Es seien f_1 und f_2 zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{F}$,

$$u_1(x) = U_x[f_1], \quad u_2(x) = U_x[f_2], \quad v_1(x) = V_x[f_1], \quad v_2(x) = V_x[f_2].$$

Dann gilt, wie man aus der Definitionsgleichung (4.9) leicht erkennt, für den in (4.2) definierten Abstand D

$$(4.10) \qquad D(v_1, v_2) \leqq D(u_1, u_2).$$

Andrerseits ist nach (4.4)

$$u_1(x) - u_2(x) = M \int_0^\infty \int_0^h \Big\{ K_2\big(k(\lambda)\,|x-t|\big) - K_2\big(k(\lambda)\,t\big) + \\ + \int_h^x \big[K_2\big(k(\lambda)\,t\big) - K_2\big(k(\lambda)\,(h-t)\big)\big] \Big\} \cdot \big[E\big(\lambda, f_1(t)\big) - E\big(\lambda, f_2(t)\big)\big]\, dt\, d\lambda.$$

Da nach (1.6) $|K_2(x)| \leqq \frac{1}{2}$ und nach (1.9) $E(\lambda, T)$ monoton zunehmend in T ist, wird nach dem Satz von Fubini [18]) mit (1.10)

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leqq 2M \int_0^\infty \int_0^h \big|E\big(\lambda, f_1(t)\big) - E\big(\lambda, f_2(t)\big)\big|\, dt\, d\lambda \\ = 2M \int_0^h \int_0^\infty \big|E\big(\lambda, f_1(t)\big) - E\big(\lambda, f_2(t)\big)\big|\, d\lambda\, dt = 2M \int_0^h \frac{\sigma}{\pi} \big|f_1^4(t) - f_2^4(t)\big|\, dt \\ \leqq 2M\, h \frac{\sigma}{\pi} \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq h} \big|f_1^4(t) - f_2^4(t)\big| \leqq 2M\, h \frac{\sigma}{\pi} 4B^3\, D(f_1, f_2),$$

[17]) Diese Eigenschaft, die der Schaudersche Fixpunktsatz voraussetzt, konnte für die Abbildung U nicht bewiesen werden, auch nicht über anderen Teilräumen von $\mathfrak{C}$, weshalb die Hilfsabbildung V eingeführt wurde.

[18]) Vgl. Fußnote [9]).

woraus mit (4.10)

$$D(v_1, v_2) \leqq 8 \frac{\sigma}{\pi} M h B^3 \cdot D(f_1, f_2) \tag{4.11}$$

und damit die behauptete Stetigkeit der Abbildung V folgt.

II. Eigenschaften der Menge $\mathfrak{F}$ und ihrer Bildmenge $\mathfrak{V} = V[\mathfrak{F}]$.

(a) $\mathfrak{F}$ ist nicht leer; z.B. gehört $f(x) \equiv B$ zu $\mathfrak{F}$.

(b) $\mathfrak{F}$ ist konvex.

(c) $\mathfrak{F}$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{C}$.

(d) Die Funktionen aus $\mathfrak{V} = V[\mathfrak{F}]$ sind gleichgradig stetig.

Beweis. Nach (1.6) ist für alle $t \geqq 0$

$$0 \leqq K_1(t) \leqq 1, \qquad -\tfrac{1}{2} \leqq K_2(t) \leqq 0, \qquad 0 \leqq K_3(t) \leqq \tfrac{1}{3},$$

und nach (1.9) ist $E(\lambda, T)$ monoton zunehmend in T. Ist $f \in \mathfrak{F}$, so gilt also mit (4.6) für $u(x) = U_x[f]$:

$$|u'(x)| \leqq \frac{1}{h} \cdot |R_h - R_0| + M \int_0^\infty \Big\{ \frac{1}{2} \left[E(\lambda, T_0) + E(\lambda, T_h) \right] +$$

$$+ \frac{1}{h\, k(\lambda)} \left[\frac{1}{3} - K_3\big(k(\lambda)\, h\big) \right] \cdot |E(\lambda, T_0) - E(\lambda, T_h)| + [h\, k(\lambda) + 1]\, E(\lambda, B) \Big\} d\lambda .$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung stellt eine von x und f unabhängige Konstante C dar:

$$|u'(x)| \leqq C \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq h \quad \text{und alle Funktionen } u \in \mathfrak{U} = U[\mathfrak{F}]. \tag{4.12}$$

Aus (4.12) folgt für beliebiges x und δ mit $0 \leqq x \leqq x + \delta \leqq h$:

$$|u(x + \delta) - u(x)| \leqq \delta \cdot C. \tag{4.13}$$

Wie wir nun aus der Definitionsgleichung (4.9) leicht ersehen, gilt für $v(x) = V_x[f]$

$$|v(x + \delta) - v(x)| \leqq |u(x + \delta) - u(x)|,$$

also mit (4.13)

$$|v(x + \delta) - v(x)| \leqq \delta C$$

für beliebiges $v \in \mathfrak{V}$ und alle x, δ mit

$$0 \leqq x \leqq x + \delta \leqq h,$$

woraus unmittelbar die Behauptung (d) folgt.

(e) Der Raum $\mathfrak{V} = V[\mathfrak{F}]$ ist kompakt in $\mathfrak{C}$.

Denn die Funktionen aus $\mathfrak{V}$ sind einerseits nach Ia) durch b und B beschränkt und andrerseits nach IId) gleichgradig stetig. Also ist wegen des Häufungsstellenprinzips für gleichgradig stetige Funktionen der Raum $\mathfrak{V}$ kompakt in $\mathfrak{C}$.

(f) Für alle Funktionen $u \in \mathfrak{U}$ und $v \in \mathfrak{V}$ gilt

$$u(0) = v(0) = R_0 \quad \text{und} \quad u(h) = v(h) = R_h. \tag{4.14}$$

Ist nämlich f beliebig aus $\mathfrak{F}$, so läßt sich die Behauptung für $u(x) = U_x[f]$ leicht verifizieren, indem man in der Gl. (4.4) $x = 0$ bzw. $x = h$ setzt. Da nun nach Definition von b und B

$$b \leq R_0 \leq B \quad \text{und} \quad b \leq R_h \leq B$$

ist, folgt die Behauptung für $v(x)$ aus der Gl. (4.9).

Aus den unter I und II zusammengefaßten Eigenschaften resultiert das Ergebnis: $\mathfrak{F}$ ist eine konvexe und abgeschlossene Menge des Banach-Raums $\mathfrak{C}$, die durch die stetige Abbildung V auf die kompakte Menge $\mathfrak{B} = V[\mathfrak{F}] \subseteq \mathfrak{F}$ abgebildet wird. Damit sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von SCHAUDER ([9], Satz II [19]) für die Abbildung V erfüllt, und wir erhalten den

Hilfsatz 8. Es existiert für die Abbildung V mindestens ein Fixpunkt $T \in \mathfrak{F}$, d.h. eine über $[0, h]$ stetige Funktion $T(x)$, die die Gleichung

$$T(x) = V_x[T] \tag{4.15}$$

und die Ungleichung

$$b \leq T(x) \leq B \tag{4.16}$$

für $0 \leq x \leq h$ erfüllt. Außerdem ist

$$T(0) = R_0 \quad \text{und} \quad T(h) = R_h. \tag{4.17}$$

Die Aussage (4.17) folgt aus (4.14), da wegen (4.15) $T \in \mathfrak{B}$.

Nun besteht aber unsere Aufgabe darin, der Abbildung U, nicht der Abbildung V einen Fixpunkt nachzuweisen. Diese Lücke wird geschlossen durch folgenden

Hilfsatz 9. Ist $T(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{F}$, die der Gl. (4.15) genügt, so gilt für ihr U-Bild $S(x) = U_x[T]$ die Ungleichung

$$b \leq S(x) \leq B \qquad (0 \leq x \leq h). \tag{4.18}$$

Beweis. In dem trivialen Fall $T_0 = T_h = R_0 = R_h$ enthält $\mathfrak{F}$ als einziges Element die Funktion $f(x) = B$. Wie man leicht nachrechnet, ist dann auch $U_x[f] \equiv V_x[f] \equiv B$, was die Behauptung ergibt.

Wenden wir uns also der Betrachtung des Falles $b < B$ zu, und nehmen wir indirekt an, daß die Menge

$$X = \{x \mid 0 \leq x \leq h \text{ und } S(x) > B\}$$

nicht leer ist. Weil nach (4.14) $S(0) = R_0$ und $S(h) = R_h$ ist, gehören 0 und h nicht zu X:

$$X = \{x \mid 0 < x < h \text{ und } S(x) > B\}.$$

[19]) Der Satz lautet: „In einem B-Raume sei eine konvexe und abgeschlossene Menge H gegeben. Die stetige Funktionaloperation $F(x)$ bilde H auf sich selbst ab. Ferner sei die Menge $F(H) \subseteq H$ kompakt. Dann ist ein Fixpunkt vorhanden." Dabei entspricht die Bezeichnung „F bildet H *auf* sich ab" der heute üblichen „F bildet H *in* sich ab".

Jede absolute Maximalstelle x_0 der Funktion $S(x)$ über dem Intervall $[0, h]$ gehört sicherlich zu X, weshalb $0 < x_0 < h$ und damit wegen der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von $S(x)$

$$S''(x_0) \leqq 0 \tag{4.19}$$

wird. Gemäß (4.9) erhalten wir für alle $x \in X$

$$V_x[T] = B,$$

also folgt aus (4.15)

$$T(x_0) = B. \tag{4.20}$$

Wir befassen uns nun mit dem Ausdruck

$$H(\lambda, x) = 2E(\lambda, T(x)) + \int_0^h k(\lambda) K_0(k(\lambda)|x-t|) E(\lambda, T(x)) dt - \\ - K_1(k(\lambda) x) E(\lambda, T_0) - K_1(k(\lambda)(h-x)) E(\lambda, T_h).$$

A. Integrieren wir mittels (1.8) das t-Integral in dieser Definitionsgleichung von $H(\lambda, x)$ aus und setzen $x = x_0$, so ergibt sich

$$\begin{cases} H(\lambda, x_0) = K_1(k(\lambda) x_0)\,[E(\lambda, T(x_0)) - E(\lambda, T_0)] + \\ \qquad + K_1(k(\lambda)(h-x_0))\,[E(\lambda, T(x_0)) - E(\lambda, T_h)]. \end{cases} \tag{4.21}$$

$K_1(t)$ ist im ganzen Definitionsbereich positiv, $E(\lambda, T)$ für festes $\lambda > 0$ i.e.S. monoton zunehmend in T, $E(0, T) = 0$ [vgl. (1.6) und (1.9)]. Daher folgt aus (4.20) und (4.21)

$$H(\lambda, x_0) \begin{cases} = 0 & \text{für } \lambda = 0 \text{ oder für } T_0 = T_h = B, \\ > 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.22}$$

Wegen der Voraussetzungen über $k(\lambda)$ liefert (4.22) die Ungleichung

$$\int_0^\infty k(\lambda) H(\lambda, x_0)\, d\lambda \begin{cases} = 0 & \text{für } T_0 = T_h = B, \\ > 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.23}$$

B. $S''(x)$ genügt nach (4.7) der Gleichung

$$\begin{cases} \int_0^\infty k(\lambda) \Big\{ 2E(\lambda, T(x)) + \int_0^h k(\lambda) K_0(k(\lambda)|x-t|) E(\lambda, T(t)) dt - \\ \quad - K_1(k(\lambda) x) E(\lambda, T_0) - K_1(k(\lambda)(h-x)) E(\lambda, T_h) \Big\} d\lambda = \frac{1}{M} S''(x). \end{cases} \tag{4.24}$$

Außer im Falle $R_0 = R_h = B$ folgt aus $T(0) = R_0$ und $T(h) = R_h$, daß

$$T(x) < B \qquad \text{für gewisse } x \text{ aus } [0, h].$$

Wegen der Stetigkeit von $T(x)$, wegen (4.20) und $K_0(t) < 0$ ergibt sich damit

$$\int_0^h k(\lambda) K_0(k(\lambda)|x_0 - t|) \times \\ \times [E(\lambda, T(t)) - E(\lambda, T(x_0))] dt \begin{cases} \geqq 0 \text{ für } \lambda = 0, \text{ für } k(\lambda) = 0, \text{ oder für } R_0 = R_h = B, \\ > 0 \text{ sonst;} \end{cases}$$

also

$$(4.25)\quad \begin{cases} 2E(\lambda, T(x_0)) + \int_0^h k(\lambda) K_0(k(\lambda)|x_0 - t|) E(\lambda, T(t))\, dt - K_1(k(\lambda) x_0) E(\lambda, T_0) - \\ - K_1(k(\lambda)(h - x_0)) E(\lambda, T_h) \begin{cases} \geqq H(\lambda, x_0) & \text{für } \lambda = 0,\ k(\lambda) = 0 \text{ oder } R_0 = R_h = B, \\ > H(\lambda, x_0) & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Aus den Relationen (4.19), (4.24) und (4.25) resultiert:

$$(4.26)\quad \int_0^\infty k(\lambda) H(\lambda, x_0)\, d\lambda \begin{cases} \leq 0 & \text{für } R_0 = R_h = B, \\ < 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ungleichungen (4.23) und (4.26) widersprechen sich außer in dem schon behandelten Falle $T_0 = T_h = R_0 = R_h = B$. Die Menge X ist also leer, d.h.

$$S(x) \leq B \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq h.$$

Der linke Teil der Ungleichung (4.18) wird analog bewiesen.

Aus der soeben bewiesenen Relation (4.18) und aus der Definitionsgleichung (4.9) folgt unmittelbar, daß alle die Gl. (4.15) erfüllenden Funktionen $T \in \mathfrak{F}$ der Gleichung

$$U_x[T] \equiv V_x[T]$$

genügen, also auch der Gleichung

$$U_x[T] = T(x) \qquad (0 \leq x \leq h).$$

Wir fassen dieses Resultat mit Hilfsatz 8 und Satz 2 zusammen:

Satz 6 (*Existenzsatz für den Fall* $\varkappa > 0$). *Die Gl.* (4.1) *und damit* (1.1) *besitzt genau eine stetige nichtnegative Lösungsfunktion* $T(x)$, *die die Randwerte* R_0 *und* R_h *annimmt. Außerdem genügt diese Funktion für* $0 \leq x \leq h$ *der Ungleichung*

$$(4.27)\quad \operatorname{Min}(T_0, T_h, R_0, R_h) \leq T(x) \leq \operatorname{Max}(T_0, T_h, R_0, R_h).$$

4.2. Monotonie der Lösungsfunktion

Wie im Falle $\varkappa = 0$ können wir auch hier nachweisen, daß die Lösungsfunktion für $T_0 \neq T_h$ i.e.S. monoton verläuft, allerdings nur unter der Voraussetzung $T(0) = T_0$, $T(h) = T_h$ für die Randwerte, die aber den physikalisch interessanten Fall erfaßt.

Satz 7 (*Monotoniesatz für den Fall* $\varkappa > 0$). *Es sei* $T(x)$ *die nichtnegative Lösungsfunktion der Gl.* (1.1) *mit den Randwerten* $T(0) = T_0$ *und* $T(h) = T_h$. *Falls dann* $T_0 > T_h$ *bzw.* $T_0 < T_h$ *ist, nimmt* $T(x)$ *i.e.S. monoton ab bzw. zu.*

Beweis. Für den Fall $k(\lambda) \equiv 0$ folgt die Behauptung unmittelbar, vgl. S. 374, so daß wir diesen Fall von der weiteren Betrachtung ausschließen können. Es sei etwa $T_0 > T_h$, und wir nehmen indirekt an, daß $T(x)$ nicht i.e.S. monoton abnimmt. Dann gibt es ein Teilintervall von $[0, h]$, in dem

$T'(x) \geqq 0$ ist; x' bezeichne einen beliebigen inneren Punkt dieses Intervalls. Unter den absoluten Minimalstellen der Funktion $T(x)$ für das Intervall $[0, x']$ gibt es eine solche x_1, für die $0 < x_1 < x'$ wird, ebenso unter den absoluten Maximalstellen von $T(x)$ für das Intervall $[x_1, h]$ eine solche x_2, für die $x_1 < x_2 < h$ ist, da ja $T(x)$ nach (4.27) die Ungleichung

$$T_0 = T(0) \geqq T(x) \geqq T(h) = T_h \qquad (0 \leqq x \leqq h) \tag{4.28}$$

erfüllt. Somit gelten für das Argumentenpaar x_1, x_2 die Relationen

$$0 < x_1 < x_2 < h, \tag{4.29}$$

$$\begin{cases} T(0) \geqq T(x) \geqq T(x_1) & \text{für } 0 \leqq x \leqq x_1, \\ T(x_1) \leqq T(x) \leqq T(x_2) & \text{für } x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ T(x_2) \geqq T(x) \geqq T(h) & \text{für } x_2 \leqq x \leqq h, \end{cases} \tag{4.30}$$

insbesondere also auch $T''(x_1) \geqq 0$, $T''(x_2) \leqq 0$ und deshalb

$$T''(x_1) - T''(x_2) \geqq 0. \tag{4.31}$$

I. Für die Funktion

$$\begin{cases} G(\lambda; x_1, x_2) = J(\lambda; x_1, x_2) + 2\left[E\left(\lambda, T(x_1)\right) - E\left(\lambda, T(x_2)\right)\right] - \\ \qquad - E(\lambda, T_0)\left[K_1\left(k(\lambda)\, x_1\right) - K_1\left(k(\lambda)\, x_2\right)\right] - \\ \qquad - E(\lambda, T_h)\left[K_1\left(k(\lambda)\,(h - x_1)\right) - K_1\left(k(\lambda)\,(h - x_2)\right)\right] \end{cases} \tag{4.32}$$

mit

$$J(\lambda; x_1, x_2) = \int_0^h k(\lambda)\left[K_0\left(k(\lambda)\,|x_1 - t|\right) - K_0\left(k(\lambda)\,|x_2 - t|\right)\right] E\left(\lambda, T(t)\right) dt$$

folgt wegen (4.31) und (4.14)

$$\int_0^\infty k(\lambda)\, G(\lambda; x_1, x_2)\, d\lambda = \frac{1}{M}\left[T''(x_1) - T''(x_2)\right] \geqq 0. \tag{4.33}$$

II. Andrerseits ist

$$\begin{aligned} J(\lambda; x_1, x_2) = {} & \int_0^{x_1} k(\lambda)\left[K_0\left(k(\lambda)\,(x_1 - t)\right) - K_0\left(k(\lambda)\,(x_2 - t)\right)\right] E\left(\lambda, T(t)\right) dt + \\ & + \int_{x_1}^{x_2} k(\lambda)\, K_0\left(k(\lambda)\,(t - x_1)\right) E\left(\lambda, T(t)\right) dt - \int_{x_1}^{x_2} k(\lambda)\, K_0\left(k(\lambda)\,(x_2 - t)\right) E\left(\lambda, T(t)\right) dt + \\ & + \int_{x_2}^{h} k(\lambda)\left[K_0\left(k(\lambda)\,(t - x_1)\right) - K_0\left(k(\lambda)\,(t - x_2)\right)\right] E\left(\lambda, T(t)\right) dt. \end{aligned}$$

In dieser Darstellung von J wechselt keiner der Integranden der vier auftretenden Integrale im zugehörigen Integrationsbereich sein Vorzeichen, da $K_0(t)$ i.e.S. monoton zunimmt. Der erweiterte Mittelwertsatz der Integral-

rechnung ist anwendbar, und wir erhalten mit (1.8')

$$(4.34)\quad \begin{cases} J(\lambda; x_1, x_2) \\ = E(\lambda, T(z_1)) \cdot [-1 + K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1)) + K_1(k(\lambda) x_1) - K_1(k(\lambda) x_2)] + \\ \quad + [E(\lambda, T(z_2)) - E(\lambda, T(z_3))] \cdot [K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1)) - 1] + \\ \quad + E(\lambda, T(z_4))[K_1(k(\lambda)(h - x_1)) - K_1(k(\lambda)(h - x_2)) - K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1)) + 1], \end{cases}$$

wobei die Argumente z_i gewisse, noch von λ abhängige Mittelwerte sind, für die gilt

$$(4.35)\qquad 0 \leqq z_1 \leqq x_1 \leqq \begin{Bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} \leqq x_2 \leqq z_4 \leqq h.$$

Wir setzen (4.34) in (4.32) ein und ordnen um:

$$(4.36)\quad \begin{cases} G(\lambda; x_1, x_2) = [K_1(k(\lambda) x_1) - K_1(k(\lambda) x_2)][E(\lambda, T(z_1)) - E(\lambda, T_0)] + \\ \quad + [K_1(k(\lambda)(h - x_2)) - K_1(k(\lambda)(h - x_1))][E(\lambda, T_h) - E(\lambda, T(z_4))] + \\ \quad + [1 - K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1))][E(\lambda, T(z_3)) + E(\lambda, T(z_4)) - 2E(\lambda, T(x_2))] + \\ \quad + [1 - K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1))][2E(\lambda, T(x_1)) - E(\lambda, T(z_2)) - E(\lambda, T(z_1))] + \\ \quad + 2K_1(k(\lambda)(x_2 - x_1))[E(\lambda, T(x_1)) - E(\lambda, T(x_2))]. \end{cases}$$

Wenn wir beachten, daß $K_1(t)$ i.e.S. monoton abnimmt, $0 < K_1(t) < 1$ $(t > 0)$ ist, und $E(\lambda, T)$ für positives λ in T i.e.S. monoton zunimmt, erkennen wir:

1. Keiner der Summanden der rechten Seite von (4.36) ist positiv.

Denn nach (4.28), (4.30) und (4.35) wird

$$(4.37)\qquad T_0 \geqq T(z_1) \geqq T(x_1) \leqq \begin{Bmatrix} T(z_2) \\ T(z_3) \end{Bmatrix} \leqq T(x_2) \geqq T(z_4) \geqq T_h.$$

2. Für $\lambda > 0$ und $k(\lambda) > 0$ wird mindestens einer der fünf Summanden der rechten Seite von (4.36) negativ.

Denn wegen $x_1 < x_2$ (4.29) ist jeder der fünf links stehenden Faktoren positiv; da wegen $T_0 > T_h$ in mindestens einer der Relationen (4.37) das Ungleichheitszeichen stehen muß, wird für $\lambda > 0$ mindestens einer der rechts stehenden Faktoren negativ.

Aus 1. und 2. folgt aber:

$$\int_0^\infty k(\lambda)\, G(\lambda; x_1, x_2)\, d\lambda < 0$$

im Widerspruch zu (4.33), weshalb die Annahme, $T(x)$ nehme nicht i.e.S. monoton ab, verworfen werden muß. Analog oder durch Betrachtung von $\overline{T}(x) = T(h - x)$ läßt sich der Beweis im Falle $T_0 < T_h$ führen.

Literatur

[1] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932. — [2] Genzel, L.: Der Anteil der Wärmestrahlung bei Wärmeleitungsvorgängen. Z. Physik **135**, 177—195 (1953). — [3] Hammerstein, A.: Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen.

Acta Math. **54**, 117—176 (1930). — [*4*] HOPF, E.: Über das Strahlungsgleichgewicht in den äußeren Schichten der Sterne. Z. Physik **49**, 155—161 (1928). — [*5*] IGLISCH, R.: Existenz- und Eindeutigkeitssätze bei nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann. **108**, 161—189 (1933). — [*6*] KOURGANOFF, V., and I. W. BUSBRIDGE: Basic Methods in Transfer Problems, Radiative Equilibrium and Neutron Diffusion. Oxford 1952. — [*7*] LICHTENSTEIN, L.: Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin 1931. — [*8*] MILNE, E. A.: Radiative equilibrium in the outer layers of a star. Monthly Note Roy. Astron. Soc. **81**, 361—375 (1921). — [*9*] SCHAUDER, J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Math. **2**, 171—180 (1930). — [*10*] SCHMIDT, E.: Über die Auflösung nichtlinearer Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen. Math. Ann. **65**, 371—399 (1908). — [*11*] SCHWARZSCHILD, K.: Über Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre. Sitzgsber. Preuß. Akad. Wiss. **47**, 1183—1207 (1914). — [*12*] WALTHER, A., J. DÖRR u. E. ELLER: Mathematische Berechnung der Temperaturverteilung in der Glasschmelze mit Berücksichtigung von Wärmeleitung und Wärmestrahlung. Glastechn. Berichte **26**, 133—140 (1953). — [*13*] LERAY, J.: La théorie des points fixes et ses applications en analyse. Proc. Intern. Congr. Math. **1950**, II, 202—208 (1952).

Frankfurt a.M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 10. August 1955)

Einführung in die Physik

Von **R. W. Pohl**, em. Professor der Physik an der Universität Göttingen.

Erster Band: **Mechanik, Akustik und Wärmelehre.**

Dreizehnte, verbesserte Auflage. Mit 575 Abbildungen, darunter 15 entlehnten. XII, 345 Seiten Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 29.70

Aus den Besprechungen der 12. Auflage: Ein Rezensent hat einmal geschrieben, daß das Studium der POHLschen „Einführung in die Physik" den Besuch einer Experimentalvorlesung erübrige. Natürlich ist eine solche Beurteilung nicht wörtlich zu nehmen, denn das geschriebene Wort kann nie das Miterleben eines Experimentes ersetzen. Aber sie drückt doch sehr hübsch das aus, was das POHLsche Werk bietet: Eine erstklassige Einführung in die Hochschulphysik an Hand von sauber beschriebenen Experimenten, die durch viele Abbildungen treffend erläutert werden ...

„Acta Physica Austriaca"

Jeder Physiker sollte sich einmal mit dem POHLschen Buch auseinandersetzen, das eine Fülle von Anregungen bringt ... Für Anfänger ist das Buch allerdings nicht unbedingt geeignet, dafür um so mehr für jeden, der tiefer in die behandelten Gebiete eindringen will. *„Der Mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht"*

Zweiter Band: **Elektrizitätslehre.**

Fünfzehnte, veränderte und ergänzte Auflage. Mit 568 Abbildungen. VIII, 325 Seiten Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 24.—

Aus den Besprechungen der 13. und 14. Auflage: ... Das POHLsche Lehrbuch ist eines der wenigen, welche nicht eine Vorlesung ergänzen, sondern sie ganz ersetzen können. Dies hat seinen Grund in der Lebendigkeit des Stils, durch den der Leser sich unmittelbar angesprochen fühlt, vor allem aber in der Gründlichkeit und Anschaulichkeit, mit dem die Experimente beschrieben werden. Durch die Entwicklung einer Fülle neuer Demonstrationsmethoden wurde POHL zum Begründer einer neuen Experimentiertechnik ...

„Zeitschrift für Elektrochemie"

Dritter Band: **Optik und Atomphysik.**

Neunte, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 565 Abbildungen im Text und auf einer Tafel, darunter 23 entlehnten. VIII, 356 Seiten Gr.-8°. 1954.
Ganzleinen DM 29.70

Aus den Besprechungen der 8. Auflage: Es ist zu erwarten, daß ein Buch, das in der 8. Auflage erscheint, etwaige Mängel vollständig abgeschliffen hat. So bedarf das vorliegende Buch von POHL, das den dritten, aber selbständigen Band seiner „Einführung in die Physik" bildet, kaum noch einer fördernden Kritik. Seine Neuauflage ist erstens durch die Nachfrage, die besonders von seiten der Studierenden naturwissenschaftlicher und medizinischer Fächer besteht, sodann aber durch die Fortschritte der Wissenschaft selbst bedingt ... Ein großer Vorzug des Werkes liegt in seinen zahlreichen übersichtlichen und klaren Abbildungen, größtenteils als Strichzeichnungen, in denen auch Darstellungen von Apparaturen wiedergegeben sind. *„Optik"*

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Soeben erschien:

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Von **Walter Weizel**, o. Professor der Physik an der Universität Bonn.

Erster Band: **Physik der Vorgänge. Bewegung. Elektrizität. Licht. Wärme.**

Zweite, verbesserte Auflage. Mit 283 Abbildungen. XVI, 804 Seiten Gr.-8°. 1955.
Ganzleinen DM 69.60

Inhaltsübersicht: **Die Theorie als ordnendes Prinzip des Erkennens. Mechanik der Massenpunkte und starren Körper:** Die freie Bewegung des einzelnen Massenpunktes. Mechanik eines Systems von vielen Massenpunkten. Die Bewegung des starren Körpers. Die Prinzipien der Dynamik. Die HAMILTON-JACOBIsche Theorie. Periodische und bedingt periodische Bewegungen. Der Übergang zur Wellenmechanik. — **Mechanik der Kontinua:** Bewegungen und Spannungen in einem Kontinuum. Elastizitätstheorie. Einfache Anwendungen der Elastizitätstheorie. Elastische Wellen und Eigenschwingungen. Eigenschwingungen elastischer Körper. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik. Ideale Flüssigkeiten. Zähe Flüssigkeiten. Kapillarität. Zeitlich veränderliche Strömungen. Strömungen kompressibler Medien. — **Elektrodynamik:** Elektrostatik. Das stationäre elektrische Feld. Das Magnetfeld des stationären Stromes. Das quasistationäre Feld. Vierpoltheorie der Schaltungen. Das schnellveränderliche elektromagnetische Feld. Die Entstehung elektrischer Wellen. — **Optik:** Fortpflanzung, Reflexion und Brechung des Lichtes. Geometrische Optik. Interferenz. Beugung. Kristalloptik. — **Elektrodynamik bewegter Körper. Relativitätstheorie:** Die Theorie des ruhenden elektromagnetischen Äthers. Die LORENTZ-Transformation. LORENTZ-invariante Elektrodynamik. Spezielle Relativitätstheorie. Das Problem der allgemeinen Relativitätstheorie. — **Thermodynamik:** Zustandsgrößen und Zustandsgleichung. Die Hauptsätze der Thermodynamik. Die thermodynamischen Funktionen und die thermodynamischen Differentialgleichungen. Einfache Anwendungen. Die absoluten Zahlwerte der thermodynamischen Funktionen. NERNSTsches Theorem. Grenzgebiete der Thermodynamik. Wärmestrahlung. Thermodynamik irreversibler Prozesse. Die Wärmeleitung. — **Sachverzeichnis.**

Aus den Besprechungen der ersten Auflage: ... Die grundlegenden Dinge werden in dem Buche in der einfachsten Weise mit einem Minimum an Mathematik dargestellt; daneben findet man aber auch kompliziertere Dinge eingehend durchgerechnet, und schließlich werden schwierige Fragen, wie etwa die Probleme der allgemeinen Relativitätstheorie, mit dem ganzen dazu nötigen Aufwand an mathematischen Hilfsmitteln in eleganter Weise behandelt. In diesen und anderen besonders gekennzeichneten Kapiteln wird der fortgeschrittene Leser manchen Leckerbissen, hier und da aber auch harte Nüsse finden. Auch der Anfänger wird zum Nachdenken angeregt, wenn der Verfasser, wie etwa bei den aus dem MICHELSONschen Versuch sich ergebenden Schwierigkeiten, nicht gleich die fertige Lösung präsentiert, sondern zuerst die näherliegenden, aber unbrauchbaren Möglichkeiten diskutiert.

Mit seinem reichen Inhalt und der klaren Darstellungsweise wird sich das Buch sowohl dem Studierenden als auch dem fertigen Physiker und Ingenieur als ein wertvolles Hilfsmittel beim Studium und bei der praktischen Arbeit erweisen ...

„Archiv der elektrischen Übertragung"

Zweiter Band: **Struktur der Materie.**

Mit 194 Textabbildungen. XII, 768 Seiten Gr.-8°. 1950.
DM 66.—; Ganzleinen DM 69.90

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen zwei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, bei

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzb
Printed in Germany